Négyjegyű függvénytáblázatok, összefüggések és adatok

MATEMATIKA

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

A kiadvány 2010. 04. 08-tól tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott
a KHF/1676-14/2010 számú határozattal

A könyv megfelel az Oktatási Minisztérium kerettantervének [17/2004. (V. 20.)]
és az érettségi vizsga követelményeinek [40/2002. (V. 24.)].

Szerzők
Dr. Hack Frigyes, Ph.D. (matematika)
Dr. Hack Frigyes, Ph.D. (informatika)
Dr. Fülöp Ferenc (fizika)
Kugler Sándorné (fizika)
Dr. Radnai Gyula (fizika)
Urbán János (fizika)
Dr. Szabados László (csillagászat)
Dr. Nemerkényi Antal (földrajz)
Dr. Balázs Lóránt (kémia)
Dr. Büki András (kémia)

Lektorok
Dr. Fried Katalin (matematika)
Hegyi Györgyné (matematika)
Lukács Judit (matematika)
Dr. Zsakó László (informatika)
Bánkuti Zsuzsa (fizika)
Dr. Radnai Gyula (fizika)
Dr. Boksay Zoltán (kémia)
J. Balázs Katalin (kémia)
Répás László (kémia)
Villányi Attila (kémia)

Szerkesztők
Tóthné Szalontay Anna (matematika)
Dr. Koreczné Kazinczi Ilona (informatika)
Medgyes Sándorné (fizika)
Gerhardtné Rugli Ilona (csillagászat, földrajz)
Oláh Zsuzsa (kémia)

Alkotószerkesztő
Michalovszky Csabáné

Az ábrákat készítette
Fried Katalin, Wintsche Gergely

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők
Kondor László
dr. Igaz Sarolta
dr. Szerényi Zoltán

ISBN 978-963-19-5703-7

Ez a kiadvány a 13129/1 raktári számú *Négyjegyű függvénytáblázatok. Matematikai, fizikai, kémiai összefüggések* című Tetszésdíjas tankönyv adatainak felhasználásával készült. A korábban is közkedvelt, közel 30 évig használt (a matematika rész először 1967-ben jelent meg) tankönyv felújítását a középiskolai tananyag megváltozása, az SI-mértékegységrendszer széles körű elterjedése tette szükségszerűvé, valamint az, hogy az eltelt évek technikai fejlődésének eredményei pontosabb adatokat szolgáltatnak a korábban mérteknél.

Az igényeknek megfelelően új területekkel egészítettük ki a matematikai, fizikai, kémiai részeket, valamint új fejezetek (informatika, csillagászat és földrajz) is kerültek a könyvbe.

Az új Négyjegyű függvénytáblázatokat kizárólag iskolai használatra szánjuk, ezért kérjük, hogy csak az iskolai elméleti számításokhoz, feladatmegoldásokhoz használják, hiszen ezek megkönnyítésére készült. Tudományos és ipari felhasználásra – minden szakmában – léteznek megfelelő adatokat szolgáltató, bevizsgált adattárak, amelyeket kiadványunk nem kíván helyettesíteni. Ez irányú felhasználásból származó hibákért a kiadó semmiféle felelősséget nem vállal.

Kiadványunk megalkotásánál a pontosságra és szakmai igényességre törekedtünk – amelynek biztosítéka a kiváló szerzők és lektorok gárdája –, de nem törekedhettünk teljességre sem a definíciók, tételek kimondásánál, sem az adatok leírásánál. Az olvasóra bízzuk, hogy a felhasználás során melyik összefüggést kívánja alkalmazni, milyen környezeti és kezdeti feltételekkel. A könyv használatához szükségesek szakmai és tudományos előismeretek, nem kívánjuk helyettesíteni a tantárgyi tankönyveket.

A szerzők és a kiadó munkatársai hosszú évek óta gondozzák és javítják az itt megjelent adattárat, amely sok évtizeden keresztül szolgált segítségként a matematika, fizika és kémia órákon, ezért az adattár – más kiadványokba történő – engedély nélküli másolásához nem járulunk hozzá.

A második kiadást a tanárok javaslatai és a beérkezett vélemények alapján javítottuk.

A szerkesztők

1. ÁLTALÁNOS TUDNIVALÓK

1.1. Néhány állandó

*1.1.1. A **Ludolf-féle** szám, a kör kerületének és átmérőjének aránya (transzcendens)*

$$\pi \approx 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510$$
$$58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\ \ldots$$

$\pi \approx 22 : 7$; $\quad \pi \approx 355 : 113$.

*1.1.2. Az **Euler-féle szám,** természetes logaritmus alapszáma (transzcendens)*

$$e \approx 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995$$
$$95749\ 66967\ 62772\ 40766\ 30353\ 54759\ 45713\ 82178\ 52516\ 64274\ \ldots$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1.1.3. A 10 alapú logaritmus modulusa (M) és reciproka

$$M = \lg e \approx 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18916\ \ldots$$

$$\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 54684\ \ldots$$

1.2. Görög betűk

A	α	alfa	H	η	éta	N	ν	nű	T	τ	tau
B	β	béta	Θ	ϑ	théta	Ξ	ξ	kszi	Υ	υ	üpszilon
Γ	γ	gamma	I	ι	ióta	O	o	omikron	Φ	φ	fí
Δ	δ	delta	K	κ	kappa	Π	π	pí	X	χ	khi
E	ε	epszilon	Λ	λ	lambda	P	ρ	ró	Ψ	ψ	pszi
Z	ζ	zéta	M	μ	mű	Σ	σ	szigma	Ω	ω	ómega

1.3. Jelölések, kapcsolatok

$\lvert a\rvert$	az a szám abszolútértéke
$[a]$	az a szám egész része
$[a;b]$	zárt intervallum
$]a;b[$	nyílt intervallum
$[a;b[$	balról zárt, jobbról nyílt intervallum
$]a;b]$	balról nyílt, jobbról zárt intervallum
AB	szakasz, távolság
$\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$	irányított szakasz, vektor

1.4. Jelek, rövidítések

$=$, $\neq$, $\approx$	egyenlő, nem egyenlő, közelítőleg egyenlő	$a = b$, $2 \neq 5$, $\pi \approx 3{,}14$
$<$, $\leq$	kisebb, kisebb vagy egyenlő	$\sin x < x + 1$
$>$, $\geq$	nagyobb, nagyobb vagy egyenlő	$a^2 + b^2 > 1$
$\in$, $\notin$	eleme, nem eleme a halmaznak	$q \in A$, $x \notin \mathbb{Q}$
$\subseteq$, $\subset$	részhalmaz, valódi részhalmaz	$M \supseteq V$, $H \subset R$
$\cup$, $\cap$	halmazok uniója, metszete	$A \cup B$, $A \cap B$
$\setminus$	halmazok különbsége	$A \setminus B$
$\odot$, $\triangle$	halmazok szimmetrikus különbsége	$W \odot Z$, $A \triangle B$
$\times$	halmazok direkt szorzata, vektoriális szorzat	$\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
$\neg$	állítás tagadása (negációja)	$\neg p$
$\vee$, $\wedge$	állítások diszjunkciója, konjunkciója	$p \vee q$, $p \wedge q$
$\Leftrightarrow$, $\oplus$	állítások ekvivalenciája, antivalenciája	$p \Leftrightarrow q$, $p \oplus q$
$\Rightarrow$	állítások implikációja	$p \Rightarrow q$
$\forall$	univerzális kvantor (minden x-re igaz ...)	$\forall x\colon \ldots$
$\exists$	egzisztenciális kvantor (van olyan x, ...)	$\exists x\colon \ldots$
$\sum$	összeg (szumma)	$\sum_{i=1}^{n} a_i$
$\prod$	szorzat (produktum)	$\prod_{i=1}^{n} a_i$
!	faktoriális	$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
$\int$	határozatlan integrál	$F = \int f$
$\int_a^b$	határozott integrál	$A = \int_0^{10} \sqrt{x}\,dx$
$\sphericalangle$	szög	$ARD\sphericalangle$
R ⊾ ∟	derékszög	$\alpha = R$, $\alpha =$ ⊾, $\alpha =$ ∟
$\perp$	merőleges	$a \perp e$, $f \perp S$
$\parallel$	párhuzamos	$e \parallel f$, $S \parallel Z$
$\sim$	hasonló	$ABC_\triangle \sim PQR_\triangle$
$\cong$	egybevágó	$ABC_\triangle \cong PQR_\triangle$
mod	osztási maradék	$15 \mod 4 = 3$, $15 \equiv 3 \pmod 4$
lim	limesz, határérték	$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$
exp	exponenciális függvény	$x \mapsto e^x$
log, lg, ln	logaritmus	$\log_a b$, $\lg x$, $\ln x$
$\emptyset$	az üres halmaz	$\{\,\} = \emptyset$
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza	$\{0; 1; 2; \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza	$\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$	a pozitív, a negatív egészek halmaza	$\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$	a racionális, az irracionális számok halmaza	
$\mathbb{R}$	a valós (*reális*) számok halmaza	
$\mathbb{C}$	a komplex számok halmaza	
∞	végtelen	

2.1. Matematikai logika

2.1.1. Jelölések, műveletek

Kijelentések: $a, b, c, \ldots$

$h = \downarrow = 0 =$ a *hamis* érték

$i = \uparrow = 1 =$ az *igaz* érték.

$\neg a$; *negáció* (NEM, tagadás),

$a \vee b$; *diszjunkció* (megengedő vagy),

$a \wedge b$; *konjunkció* (ÉS),

$a \Rightarrow b$; *implikáció*,

$a \Leftrightarrow b$; *ekvivalencia*,

$a \oplus b$; *antivalencia* (kizáró vagy).

2.1.2. Igazságtáblázatok

$a =$	h	h	i	i
$b =$	h	i	h	i
$\neg a$	i	–	h	–
$a \vee b$	h	i	i	i
$a \wedge b$	h	h	h	i
$a \Rightarrow b$	i	i	h	i
$a \Leftrightarrow b$	i	h	h	i
$a \oplus b$	h	i	i	h
$\neg(a \vee b)$	i	h	h	h
$\neg(a \wedge b)$	i	i	i	h

2.1.3. Műveleti azonosságok, tulajdonságok

$\neg(\neg a) = a$		
$\neg h = i$	$\neg i = h$	
$a \vee h = a$	$a \wedge i = a$	
$a \vee i = i$	$a \wedge h = h$	
$a \vee \neg a = i$	$a \wedge \neg a = h$	
$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$	kommutatív
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	asszociatív
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	disztributív
$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$	abszorbció (elnyelési tulajdonság)
$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$	idempotens
$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	De Morgan-szabályok

2.2.1. Elnevezések, összefüggések

Adott, ismert egy halmaz, ha mindenről el lehet dönteni, hogy eleme-e vagy sem.

Jelölések:

$a \in H$ – *az a elem a H halmazhoz tartozik, annak eleme.*

$x \notin T$ – *az x elem nem tartozik a T halmazhoz, annak nem eleme.*

Halmaz megadása:

Az elemek felsorolásával. Pl.: $\{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$ – *a páros számjegyek halmaza.*

Eldöntési szabállyal. Pl.: $\{x \mid E(x)\}$ – *az* $E(x)$ *szabálynak megfelelő x elemek halmaza.*

Egyenlő két halmaz akkor és csak akkor, ha ugyanazokból az elemekből állnak.

Venn-diagram: a halmazok egymás közötti viszonyát ábrázoló grafikon.

Részhalmaza a Q halmaz egy H halmaznak, ha minden eleme H-nak is eleme:

$$Q \subseteq H \Leftrightarrow \forall x : (x \in Q \Rightarrow x \in H)\,.$$

Valódi részhalmaz: $Q \subset H \Leftrightarrow (Q \subseteq H) \wedge (Q \neq H)$.

Üres halmaz, aminek nincsenek elemei: $\emptyset$.

Minden H halmazra igaz: $\emptyset \subseteq H$.

Univerzális halmaz (U)**:** minden létezőt egyesítő halmaz.

Minden H halmazra igaz: $H \subseteq U$.

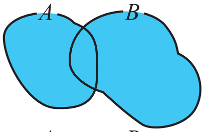
Számosság: az A halmaz elemeinek száma = card(A).

A természetes számok halmazának számossága: card$(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (olv.: alef-null).

2.2.2. Műveletek halmazokkal

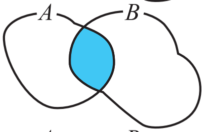
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$; A és B **egyesítése** (uniója),

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

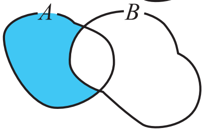


$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$; A és B **metszete** (közös része),

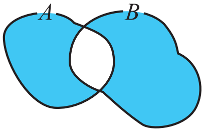
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n,$$



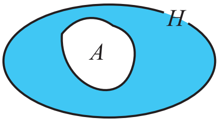
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$; A és B **különbsége, különbséghalmaza,**



$A \odot B = A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; A és B **szimmetrikus különbsége,**



$\overline{A_H} = \{x \mid x \notin A \wedge x \in H\} = H \setminus A$; A-nak H-beli **komplementere,**



$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$; A és B **Descartes-szorzata,**

$A^2 = A \times A$; A halmaz **kétszeres Descartes-szorzata,**

$A^n = A \times A \times \ldots \times A$; A halmaz n**-szeres Descartes-szorzata.**

2.2.3. *Műveleti azonosságok, tulajdonságok*

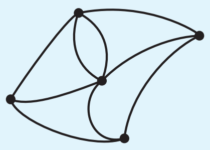
A, B, C, ... részhalmazai H-nak, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, ... ezek H-beli komplementere.

$\overline{\overline{A}} = A$		
$\overline{\emptyset} = H$	$\overline{H} = \emptyset$	
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap H = A$	
$A \cup H = H$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	
$A \cup \overline{A} = H$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	kommutatív
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	asszociatív
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	disztributív
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	adjunktív (abszorpciós tulajdonság)
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	idempotens
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan-szabályok

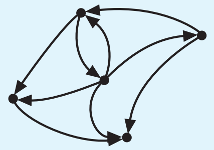
2.3. *Gráfok*

2.3.1. *Elnevezések, összefüggések*

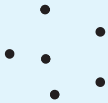
A csúcsok fokszáma, foka: a rá illeszkedő élek száma.
A csúcs *be-foka* a csúcsba futó, a *ki-foka* a belőle induló irányított élek száma.
Reguláris gráf: minden csúcsnak azonos a fokszáma (r-edfokú reguláris gráf).
Többszörös (párhuzamos) élek: ugyanazt a két csúcsot kötik össze.
Hurokél: azonos a két végpontja.
Izolált csúcs: amelyhez nem csatlakozik él.



irányítás nélküli gráf

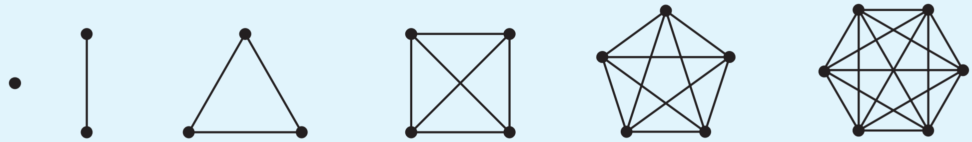


irányított gráf

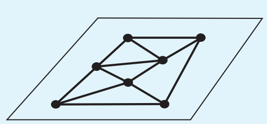


üres gráf

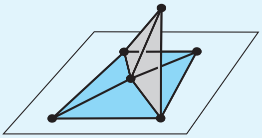
Üres gráf: nincsenek élei, a csúcsai *izoláltak*.
Teljes gráf: bármely két csúcsa közt van él.



Síkbeli gráf: megrajzolható a képe úgy, hogy az élek nem metszik egymást.

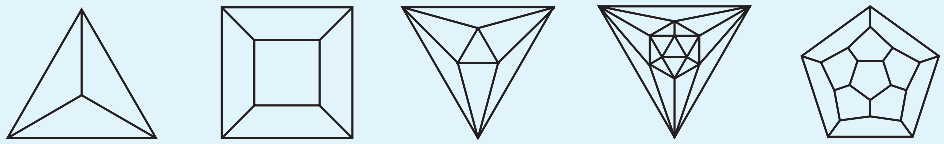


síkbeli gráf

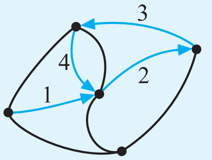


nem síkbeli gráf

Sokszöggráf: a grafikus ábra sokszög alakú *tartományokból* áll.
Euler tétele: A sokszöggráfban csúcsok + tartományok száma = élek száma + 2.
Szabályos gráf: minden tartományt azonos számú él határol.

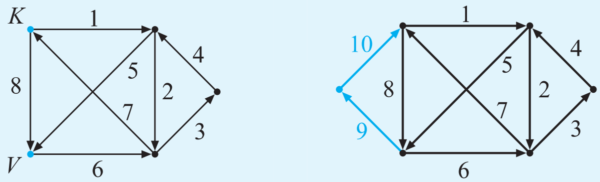


Vonal: összefüggő élsorozat, amely egy élen nem halad át többször.
Út: vonal, amely egy csúcsot nem érint többször.
Körvonal, kör: vonal, amelynek a végpontja a kezdőponttal azonos.

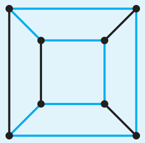


vonal: 1–2–3–4
út: 1–2–3
kör: 2–3–4

Összefüggő gráf: van út bármelyik két csúcsa között.
Euler-vonal: minden élt tartalmaz.
Hamilton-kör: minden csúcsot érint.

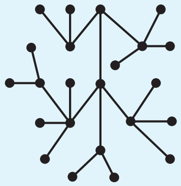


Euler-vonalak

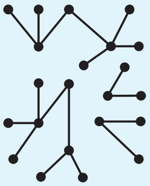


Hamilton-kör

Fa, (fa-gráf): kör nélküli összefüggő gráf.
A fa csúcsainak száma = élek száma + 1.
Erdő: minden komponense fa.
Az erdő csúcsainak száma = élek száma + komponensek száma.



fa

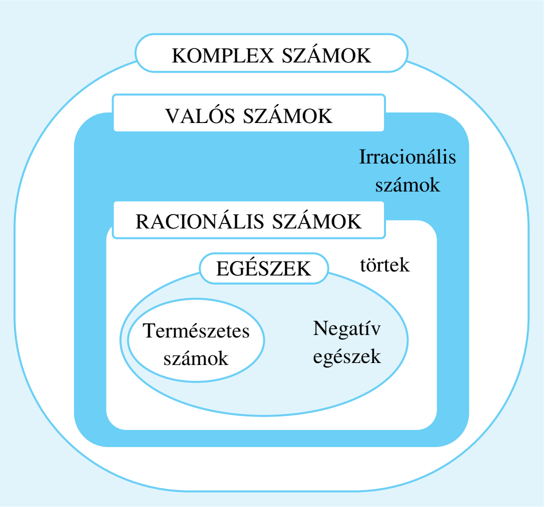


erdő

3. ARITMETIKA, SZÁMELMÉLET

3.1. Számhalmazok

3.1.1. Elnevezések, jelölések



Természetes szám: véges elemszámú halmaz számossága.

$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ a természetes számok halmaza.

$\mathbb{Z}^{+} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ a pozitív egészek halmaza.

$\mathbb{Z}^{-} = \{-1,\ -2,\ -3,\ \ldots\}$ a negatív egészek halmaza.

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^{-}$ az egészek halmaza.

Racionális számok:

a) egész számok hányadosai (a 0 osztó kivétel).

b) végtelen szakaszos tizedes- (helyiértékes) törtek.

$\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza.

Irracionális számok: végtelen nem szakaszos tizedes- (helyiértékes) törtek.

$\mathbb{Q}^{*}$ az irracionális számok halmaza.

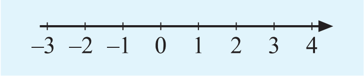
Valós számok: a racionális és az irracionális számok. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^{*}$ a valós számok halmaza.

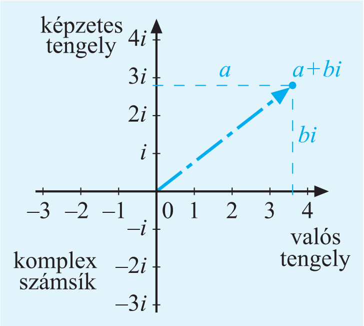
Algebrai szám: egész együtthatós polinom gyöke.

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0; \qquad \forall i : a_i \in \mathbb{Z},\ a_i \neq 0.$$

Transzcendens szám: nem algebrai szám (nem gyöke egész együtthatós polinomnak).

Számegyenes: a valós számokat egy egyenes pontjainak feleltetjük meg.





Komplex szám: rendezett valós számpár: $(a, b) = z = a + bi$.

$\mathbb{C}$ a komplex számok halmaza.

Számsík (***Gauss-féle számsík***): a komplex számokat egy sík pontjainak feleltetjük meg.

3.1.2. *Számírás, számrendszerek*

Római csomószámok és értékük:

$\{I,\ V,\ X,\ L,\ C,\ D,\ M\} \to \{1,\ 5,\ 10,\ 50,\ 100,\ 500,\ 1000\}$

Helyiértékes számírás:

Decimális számjegyek: $M_{10} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
Bináris számjegyek: $M_2 = \{0,\ 1\}$
Oktális számjegyek: $M_8 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
Hexadecimális számjegyek: $M_{16} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F\}$
Babiloni törtek: az óra és a fok törtrészeire használatos 60-ados törtek.

$1^\circ = 60' = 3600''$; $\quad 1^{\mathrm{h}} = 60^{\mathrm{m}} = 3600^{\mathrm{s}}$.

3.2. Egész számok

3.2.1. *Oszthatóság*

Osztója a k egész az m egésznek – jelölése: $k \mid m$ –, ha:

$k \mid m \Leftrightarrow \exists q : q \in \mathbb{N} \wedge q \cdot k = m.$

Az osztók (*faktorok*) halmazának jelölése: $\mathrm{fac}[x] = \{k : k \mid x,\ x \in \mathbb{N}\}$.

Többszöröse az m egész a k egésznek, ha k osztója m-nek: $k \mid m$.
A többszörösök halmazának jelölése: $\mathrm{fac}^{-1}[x] = \{k : x \mid k,\ x \in \mathbb{N}\}$

Oszthatósági szabályok (10-es számrendszerben):
$m = \alpha_n \cdot 10^n + \ldots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0 = (\alpha_n \ldots \alpha_1 \alpha_0)_{10}$
Egy m egész osztható

2-vel,	ha utolsó jegye $\in \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$
3-mal,	ha a számjegyek összege osztható 3-mal
4-gyel,	ha a két utolsó jegyből képzett szám osztható 4-gyel
5-tel,	ha utolsó jegye $\in \{0,\ 5\}$
6-tal,	ha 2-vel és 3-mal is osztható
8-cal,	ha a három utolsó jegyből képzett szám osztható 8-cal
9-cel,	ha a számjegyek összege osztható 9-cel
10-zel,	ha utolsó jegye 0
25-tel,	ha két utolsó jegye $\in \{00,\ 25,\ 50,\ 75\}$

Prímszám a $p > 1$ egész, ha csak 1 és p az osztója $\Leftrightarrow \mathrm{fac}[p] = \{1,\ p\}$.

$\mathbb{P} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ \ldots\}$ (lásd 10.9. táblázat, 94. oldal)

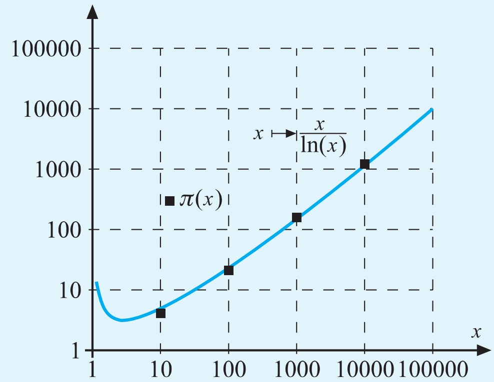
Összetett az m egész, ha 1-nél nagyobb és nem prím. (lásd 10.10. táblázat, 95. oldal)

A prímek száma x-ig: $\pi(x) = \mathrm{card}(\mathbb{P} \cap \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ x\})$

Becslés a prímek számára:

$$1.\ \pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}; \qquad 2.\ \pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

x	$\pi(x)$	$\pi(x) : \dfrac{x}{\ln x}$
10	4	0,92
100	25	1,15
1 000	168	1,16
10 000	1 229	1,32
100 000	9 592	1,10
1 000 000	78 498	1,08
10 000 000	664 579	1,07
100 000 000	5 761 455	1,06
1 000 000 000	50 847 534	1,054
10 000 000 000	455 052 512	1,048



A számelmélet alaptétele:

Minden 1-nél nagyobb természetes szám – a tényezők sorrendjétől eltekintve – egyféleképpen írható fel prímhatványok szorzataként. Ez a szám **kanonikus alakja:**

$$m = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{n_i} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

Prímosztók: $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_k$.

Prímhatvány-osztók: $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_i^{\alpha_i}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$;

$\forall i : i \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ k\}, \forall \alpha_i : \alpha_i \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n_i\}$.

Az osztók száma: $d(m) = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_k + 1)$.

Az összes osztó előállítható a különböző prímhatvány-osztók szorzataként.

Közös osztók, többszörösök:

Két szám – m és n – legnagyobb közös osztója $l = \mathrm{LNKO}(m; n) = (m; n)$.

Két szám – m és n – legkisebb közös többszöröse $k = \mathrm{LKKT}(m; n) = [m; n]$.

Kapcsolatuk: $\mathrm{LNKO}(m; n) \cdot \mathrm{LKKT}(m; n) = mn$.

Relatív prím két szám – m és n –, ha $\mathrm{LNKO}(m; n) = 1$.

Oszthatósági tételek:

Ha $(q \mid m) \wedge (q \mid n) \Rightarrow (q \mid m \cdot n) \wedge \big(q \mid (m + n)\big) \wedge (q \mid |m - n|)$.

Ha $(a \mid b) \wedge (b \mid c) \Rightarrow a \mid c$.

Ha $(p \in \mathbb{P}) \wedge (p \mid m \cdot n) \Rightarrow (p \mid m) \vee (p \mid n)$.

3.2.2. Műveletek egész számokkal

Összeadás:

Két azonos előjelű szám összeadásakor abszolútértékeik összegét a közös előjellel látjuk el.

Két különböző előjelű számot úgy adunk össze, hogy abszolútértékeik különbségét a nagyobb abszolútértékű szám előjelével látjuk el.

Kivonás:

A kivonandót ellenkező előjellel adjuk hozzá a kisebbítendőhöz.

Szorzás:

A tényezők abszolútértékeinek szorzatát az előjelszabály szerint előjelezzük.

Előjelszabály: egyező előjelűek szorzata pozitív, különbözőké negatív előjelet kap.

3.3. Racionális számok

3.3.1. Műveletek racionális számokkal

Reciprok érték (multiplikatív inverz): $x \cdot x' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$

Összeadás: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$ **Kivonás:** $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$

Szorzás: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$ **Osztás:** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$

3.4. Valós számok

3.4.1. Exponenciális (lebegőpontos) alak: $x = m \cdot q^k$.

Mantissza := $m \in \mathbb{Q}$,
Karakterisztika := $k \in \mathbb{Z}$,
A számrendszer alapja := q.

Normálalak: olyan exponenciális alak, amelynél vagy a mantissza, vagy a karakterisztika az előírt tartományba esik:

Tudományos	a mantissza $\in [1; 10[$	$25\,600 = 2{,}56 \cdot 10^4 = 2{,}56\text{E}+4$
Műszaki	a karakterisztika 3 többszöröse	$25\,600 = 25{,}6 \cdot 10^3 = 25{,}6\text{E}+3$
Informatikai	a mantissza $\in [0{,}1; 1[$	$25\,600 = 0{,}256 \cdot 10^5 = 0{,}256\text{E}+5$

3.4.2. Az összeadás és szorzás tulajdonságai

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$a + b = b + a$	$ab = ba$	kommutativitás
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$	asszociativitás
$(a + b)c = ac + bc$		a szorzás disztributivitása az összeadásra

3.4.3. Hatványok azonosságai

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall n, k \in \mathbb{Z}$

Pozitív egész kitevőjű hatvány: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (lásd 10.2. táblázat, 78. oldal); $a^1 = a$.

Negatív egész és 0 kitevőjű hatvány: $a^{-n} := \dfrac{1}{a^n}$; $a^0 := 1$.

Racionális kitevőjű hatvány: $a^{\frac{1}{k}} := \sqrt[k]{a}$; $a^{\frac{n}{k}} := \sqrt[k]{a^n}$.

Azonos alapú hatványok:

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$. $\quad a^n : a^k = a^{n-k}$. $\quad (a^n)^k = (a^k)^n = a^{nk}$.

Azonos kitevőjű hatványok:

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$. $\quad a^n : b^n = (a : b)^n$.

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a-b)$. $\quad a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a+b)$.

$a^n - b^n = (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})(a-b)$.

$a^{2k} - b^{2k} = (a^{2k-1} - a^{2k-2}b + a^{2k-3}b^2 - \ldots \pm \ldots - b^{2k-1})(a+b)$.

$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \ldots \pm \ldots + b^{2k})(a+b)$.

Többtagúak hatványai:

Binomiális tétel:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

A binomiális együtthatók: (lásd 10.11. táblázat, 96. oldal)

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Faktoriális: (lásd 10.13. táblázat, 97. oldal)

Jele: !, olvasd: faktoriális.

$0! = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 0$: $n! = (n-1)! \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Stirling-formula: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

3.4.4. Gyökök azonosságai

$\forall a,\ b \in \mathbb{R}^+;\ \forall n,\ k \in \mathbb{Z};\ n, k \geq 2.$ $\sqrt[n]{a} = b \ \Leftrightarrow\ b^n = a.$

Racionális kitevőjű hatvány: $a^{\frac{1}{k}} := \sqrt[k]{a};\ a^{\frac{n}{k}} := \sqrt[k]{a^n}.$

Azonos alapú gyökök: (lásd 10.3. táblázat, 80. oldal)

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}.$ $\sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{k-n}}.$

$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$ $\sqrt[k]{a^n} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{k}}.$

Azonos kitevőjű gyökök:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$ $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}.$

3.4.5. Logaritmusok azonosságai (lásd 10.4. táblázat, 84. oldal)

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$ $a^{\log_a b} = b.$

$\log_a b = c \ \Leftrightarrow\ a^c = b.$

Azonos alapú logaritmusok:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$ $\log_a(x : y) = \log_a x - \log_a y.$

$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x.$ $\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \left(\log_a x\right) : n.$

$\log_a a = 1.$ $\log_a 1 = 0.$

Különböző alapú logaritmusok:

$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$ $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b a \cdot \log_a x.$

$\lg x = \log_{10} x.$ $\ln x = \log_e x.$

$\lg x = M \cdot \ln x \approx 0{,}43429 \cdot \ln x.$ $\ln x = \dfrac{1}{M} \lg x \approx 2,3059 \cdot \lg x.$

3.5. Komplex számok

3.5.1. Képzetes (imaginárius) számok

Képzetes egység: az $x^2 = -1$ egyenlet egyik gyöke. Jelölése: $i = \sqrt{-1}.$

A képzetes számok halmaza: $\mathbb{I} = \{bi \mid b \in \mathbb{R} \ \wedge\ i^2 = -1\}$

A képzetes egység hatványai:

	$\forall n \in \mathbb{N}$	φ
$i^{4n} =$	$+1$	0°
$i^{4n+1} =$	i	90°
$i^{4n+2} =$	-1	180°
$i^{4n+3} =$	$-i$	270°

3.5.2. Komplex számok

Képzetes (imaginárius) számok

Képzetes egység: az $x^2 = -1$ egyenlet egyik gyöke. Jelölése: i.

A képzetes számok halmaza: $\mathbb{I} = \{bi \mid b \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad i^2 = -1\}$.

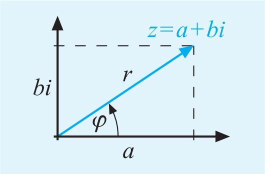
A komplex számok halmaza: $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a \in \mathbb{R} \wedge bi \in \mathbb{I}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{I}$

Aritmetikus alak: $z = a + bi$.

Trigonometrikus alak: $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

Exponenciális alak: $z = r \cdot e^{\varphi i}$; (***Euler-féle alak***).

Abszolútérték (modulus): $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

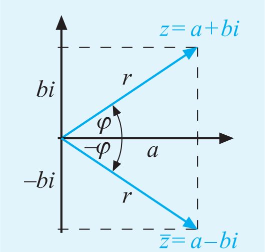


Argumentum: $\varphi = \arg(z)$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$, ha $z \neq 0$.

Valós rész: $\operatorname{Re}(z) = \Re(z) = a = r\cos\varphi$.

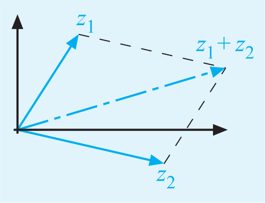
Képzetes rész: $\operatorname{Im}(z) = \Im(z) = bi = ri\sin\varphi$.

Konjugált komplex számok:



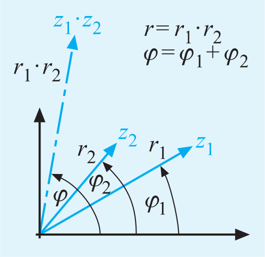
$$\begin{cases} z = a + bi = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)] = re^{\varphi i} \\ \overline{z} = a - bi = r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = re^{-\varphi i} \end{cases}.$$

Műveletek:



$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.



$z_1 \cdot z_2 = [r_1 \cdot r_2] \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = [r_1 \cdot r_2] \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

$z_1 : z_2 = [r_1 : r_2] \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = [r_1 : r_2] \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

$z^n = r^n \cdot [\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)] = r^n \cdot e^{in\varphi}$; $n \in \mathbb{Z}$.

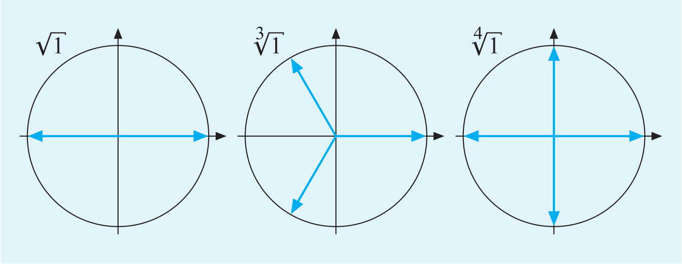
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}};.$$

$n \in \mathbb{N}^+$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Egységgyökök:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$\forall k : k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.



3.6. Gyakorlati számítások

3.6.1. Hibaszámítás

Jelölés: $a, b, \ldots$ közelítő értékek, $\overline{a}, \overline{b}, \ldots$ pontos értékek.

Hiba, hibakorlát:

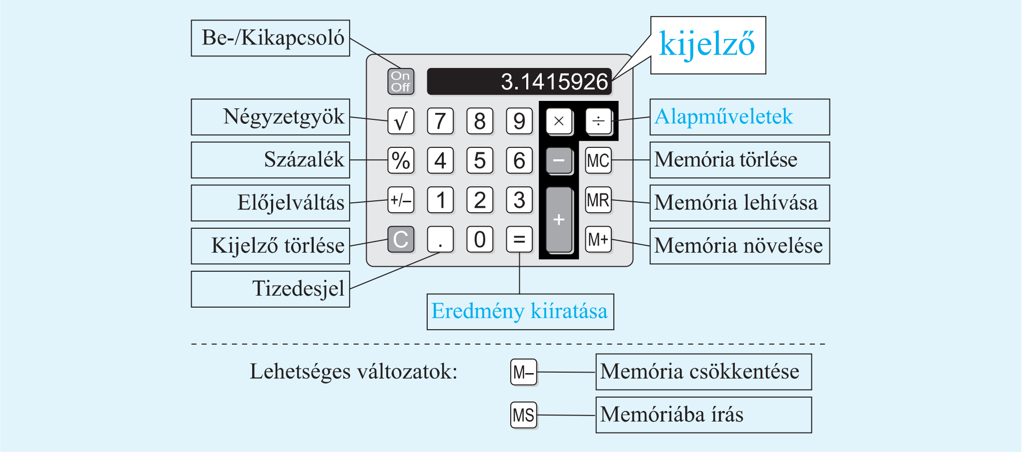
Abszolút hiba: $\lvert a-\overline{a}\rvert$	Relatív hiba: $\dfrac{\lvert a-\overline{a}\rvert}{a}$.
Abszolút hiba korlátja: $\Delta a \geq \lvert a-\overline{a}\rvert$	Relatív hiba korlátja: $\delta a = \dfrac{\Delta a}{a}$.

Műveletek, függvények hibakorlátja:

$\Delta(a+b) \leq \Delta a + \Delta b$	$\delta(a+b) \leq \delta a + \delta b$
$\Delta(a-b) \leq \Delta a + \Delta b$	$\delta(a-b) \leq \dfrac{\Delta a + \Delta b}{\lvert a-b\rvert}$
$\delta(a \cdot b) \leq \delta a + \delta b$	$\delta(a \cdot b) \leq \delta a + \delta b$
$\delta(a : b) \leq \delta a + \delta b$	$\delta(a : b) \leq \delta a + \delta b$
$\Delta(x^n) \leq n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x$	$\delta(x^n) \leq n \cdot \delta x$
$\Delta(\sqrt[n]{x}) \leq \dfrac{\sqrt[n]{x^{n-1}}}{n} \cdot \Delta x$	$\delta(\sqrt[n]{x}) \leq \dfrac{\delta x}{n}$
$\Delta[f(x)] \leq \lvert f'(x)\rvert \cdot \Delta x$	$\delta[f(x)] \leq \left\lvert \dfrac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right\rvert \cdot \delta x$

3.6.2. Zsebszámológépek

(A billentyűk elhelyezése, száma, fajtája típusonként, gyártónként különböző!)



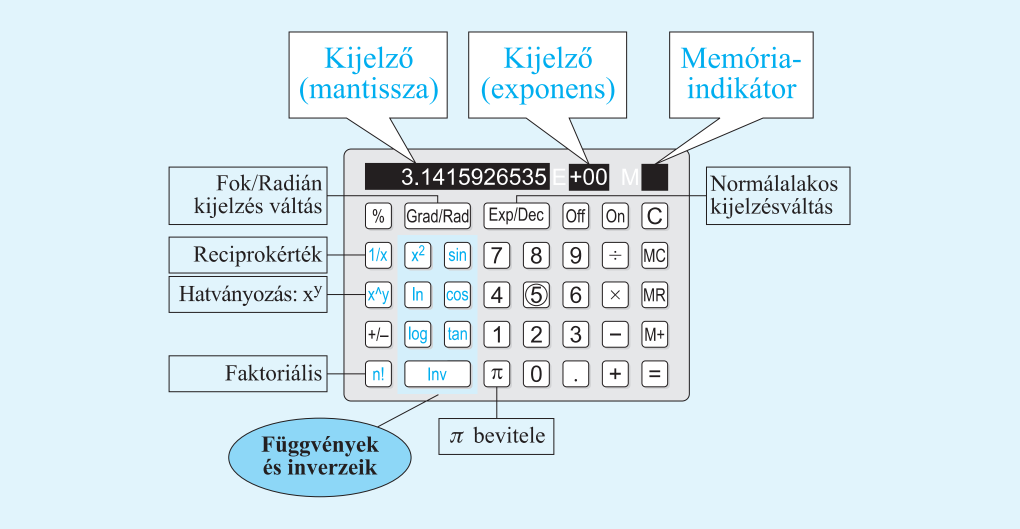
Operandusok: a kijelzőn látható számok.

1. számbillentyűkön beírt adat.
2. memóriából lehívott adat.
3. előző művelet eredménye.

Egyszerű számológép:

Elvégezhető műveletek: alapműveletek, négyzetgyökvonás, százalékszámítás.

Tudományos számológép:



A leggyakoribb beépített függvények:

x^2	négyzet
$\sqrt{x}$, sqrt	négyzetgyök
$1/x$	reciprok
$x\hat{}y$	hatvány: x^y
e^x	exponenciális
$\ln x$	természetes logaritmus
10^x	10 hatványa
$\log x$	10-es alapú logartimus
$\sin x$, $\sin^{-1} x$	szinusz és inverze (arcsin)
$\cos x$, $\cos^{-1} x$	koszinusz és inverze (arccos)
$\tan x$, $\tan^{-1} x$	tangens és inverze (arctan)

4.1. Sorozatok, sorok

4.1.1. Alapfogalmak, tulajdonságok

Jelölések:

a sorozat: $\{a_k\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$

kezdő szelete: $\{a_k\}_n = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Elnevezések:

a_n, a_k – a sorozat *tagjai*.

n, k – az a_n, a_k tagok *indexe*.

S_n – az első n tag *összege*.

Sor: $\{S_n\} = S_1, S_2, S_3, \ldots$ – a részletösszegek sorozata.

Sorozatok típusai, tulajdonságai:

$\forall k$: $a_k > 0$	pozitív definit,
$\forall k$: $a_k < 0$	negatív definit,
$\forall k$: $a_k \leq a_{k+1}$	monoton növekvő,
$\forall k$: $a_k < a_{k+1}$	szigorúan monoton növekvő,
$\forall k$: $a_k \geq a_{k+1}$	monoton csökkenő,
$\forall k$: $a_k > a_{k+1}$	szigorúan monoton csökkenő,
$(a_k - a_{k-1}) \cdot (a_{k+1} - a_k) < 0$	oszcilláló (váltakozó).

4.1.2. Nevezetes sorozatok

	Számtai sorozat	Mértani sorozat
Általános tag	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Képzési szabály	$a_n = a_{n-1} + d$	$a_n = a_{n-1} \cdot q$
Első n tag összege	$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$	$S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 1$ $S_n = n \cdot a_1$, ha $q = 1$
Közepek ($k < n$)	$a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$	$\lvert a_n \rvert = \sqrt{a_{n+k} \cdot a_{n-k}}$

d (differencia) a számtani sorozat különbsége, állandó.

q (kvóciens) a mértani sorozat hányadosa, állandó.

A végtelen mértani sor összege:

konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$, ha $|q| < 1$, különben S_n nem korlátos.

4.1.3. Középértékek

Aritmetikai közép:	$A = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}.$
Geometriai közép:	$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}.$
Harmonikus közép:	$\dfrac{n}{H} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}; \qquad H = \dfrac{n}{\sum \dfrac{1}{a_i}}.$
Négyzetes közép:	$Q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}.$

A közepek kapcsolata (pozitív tagú sorokra):

Ha minden tag azonos, akkor $H = G = A = Q$,

különben $H < G < A < Q$.

4.2. Kamatszámítás

4.2.1. Egyszeri kamat

T összeg (tőke, betét, kölcsön) évi p%-os kamata: $k = T \cdot \dfrac{p}{100}$.

Kamattényező p%-os kamatlábnál: $q = \dfrac{100 + p}{100} = 1 + \dfrac{p}{100}$.

T összeg p%-os kamattal felnövekedett értéke: $T + k = T \cdot q$.

4.2.2. Kamatos kamat

A T_0 induló tőke n év alatt felnövekedett értéke: $T_n = T_0 \cdot \left(\dfrac{100 + p}{100}\right)^n$.

A T_0 induló tőke n év alatt amortizálódott értéke: $T_n = T_0 \cdot \left(\dfrac{100 - p}{100}\right)^n$.

A T_n összeg évi p%-kal diszkontált értéke: $T_0 = T_n \cdot \left(\dfrac{100}{100 + p}\right)^n$.

Az a járadék n év alatt felnövekedett értéke: $S_n = \dfrac{100a}{p}(q^n - 1)$.

4.2.3. Járadék, kölcsön

Az a járadéknak az n-edik év végére felnövekedett értéke,

ha a befizetés minden év *elején* esedékes: $S_n = aq \cdot \dfrac{(q^n - 1)}{q - 1}$.

ha a befizetés minden év *végén* esedékes: $S_n = S_n^* = a\dfrac{(q^n - 1)}{q - 1}$.

A T hitel törlesztésének évi részlete (annuitás),

ha a törlesztés minden év *végén* esedékes: $A = \dfrac{T}{100} \cdot \dfrac{q^n \cdot p'}{q^n - 1}$.

4.3. Kombinatorika

	Ismétlés nélküli	**Ismétléses**
Permutációk	$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$	$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$
Kombinációk	$C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$	$C_n^k(\text{ism}) = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}.$
Variációk	$V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!},$	$V_n^k(\text{ism}) = n^k.$

4.4. Egyenletek

4.4.1. Alapfogalmak, elnevezések

Az egyenletben szereplő kifejezés:

Algebrai, ha az x ismeretlen csak $(+, -, \cdot, /, x^n, \sqrt[n]{x})$ műveletekben szerepel,

racionális egész: az ismeretlen csak $(+, -, \cdot, x^n)$ műveletekben szerepel.

racionális tört: az előbbiek mellett az ismeretlennel való osztás is szerepel.

irracionális: az ismeretlen adott törtkitevős hatványa (gyöke) is szerepel.

Transzcendens (nem algebrai), ha logaritmusos, exponenciális, trigonometrikus stb. kifejezésekben is szerepel az ismeretlen.

4.4.2. Algebrai egyenletek

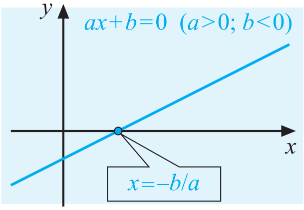
Kanonikus polinomalak: $P^n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$

Elsőfokú egyenlet

Kanonikus alak: $ax + b = 0.$

Redukált alak: $x + p = 0,\ p = \dfrac{b}{a}.$

Gyöke: $x = -\dfrac{b}{a} = -p.$



Másodfokú egyenlet

Kanonikus alak: $ax^2 + bx + c = 0$.

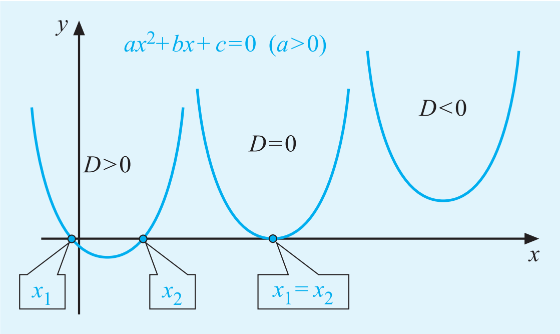
Redukált alak:

$x^2 + px + q = 0, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$

Diszkrimináns:

$D = b^2 - 4ac, \quad D^* = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$

Ha $D > 0$: két valós gyök.
Ha $D = 0$: két egyező valós gyök.
Ha $D < 0$: két komplex gyök.



Megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Gyökök: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{p}{2} + \sqrt{D^*}$, $\qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{p}{2} - \sqrt{D^*}$.

A gyökök és együtthatók kapcsolata (***Viète-formulák***):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = q, \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} = -\frac{p}{q}.$$

Harmadfokú egyenlet

Kanonikus alak: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Redukált alak: $y^3 + 3py + 2q = 0$, az $x = y - \frac{b}{3a}$ helyettesítés után.

Diszkrimináns: $D = q^2 + p^3$.
Ha $D < 0$: három különböző valós gyök (*casus irreducibilis*).
Ha $D = 0$: három valós gyök (egyik kétszeres).
Ha $D > 0$: egy valós és két komplex gyök.

Cardano-formula az u, v segédváltozókra: $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}}$, $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}$.
A redukált alak gyökei:

$$y_1 = u + v, \qquad y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \qquad y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v. \qquad \varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

Gyökök és együtthatók kapcsolata (***Viète-formulák***):

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}, \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}.$$

Negyedfokú egyenlet

Kanonikus alak: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Redukált alak: $y^4 + py^2 + qy + r = 0$. Helyettesítés: $x = y - \dfrac{b}{4a}$.

Harmadfokú rezolvens: $z^3 + \dfrac{1}{2}pz^2 + \left(\dfrac{1}{16}p^2 - \dfrac{1}{4}r\right)z - \dfrac{1}{64}q^2 = 0$, ennek gyökei: z_1, z_2, z_3.

A redukált alak gyökei:

$$y_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \qquad y_2 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3},$$

$$y_3 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \qquad y_4 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}.$$

Általános n-edfokú egyenletek

$$P^n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Az egyenlet gyöktényezős alakja:

$$a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m} = 0, \qquad [k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n].$$

A gyökök és együtthatók kapcsolata (***Viète-formulák***):

$$\sum_{1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \ldots, \prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

A gyökök korlátja: $|x_i| < 1 + \operatorname*{Max}_{i=0}^{n-1} \left|\dfrac{a_i}{a_n}\right|$.

Rolle tétele: (egész együtthatós egyenletek racionális gyökeiről)

Ha $x_i = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ az egész együtthatós egyenlet gyöke, akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_m$.

Speciális egyenletek

Tiszta másodfokú egyenlet: $x^2 + q = 0$; $\quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$, ha $q \leq 0$.

Hiányos másodfokú egyenlet: $x^2 + px = 0$; $\quad x(x + p) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -p$.

Tiszta harmadfokú egyenlet: $x^3 + q = 0$; $\quad x_1 = \sqrt[3]{-q}$.

Hiányos harmadfokú egyenlet: $x^3 + px = x(x^2 + p) = 0$; $\quad x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{-p}$, ha $p \leq 0$.

Tiszta $2n$-edfokú egyenlet: $x^{2n} = a$; $\quad x_{1,2} = \pm\sqrt[2n]{a}$, ha $a \geq 0$.

Tiszta $(2n+1)$-edfokú egyenlet: $x^{2n+1} = a$; $\quad x_1 = \sqrt[2n+1]{a}$.

Szimmetrikus harmadfokú egyenlet: $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$.

Átalakítása: $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0$.

Szimmetrikus negyedfokú egyenlet: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

Átalakítása: $a\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + c = 0$.

Helyettesítés: $x + \dfrac{1}{x} = y$, $\; x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2 \;\rightarrow\; a(y^2 - 2) + by + c = 0$.

Bi-kvadratikus egyenlet: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Helyettesítés: $x^2 = y$, $\; x^4 = y^2 \;\rightarrow\; ay^2 + by + c = 0$.

4.4.3. *Irracionális és transzcendens egyenletek*

[Általános esetben csak a közelítő módszerek valamelyike alkalmas a gyök meghatározására.]
Az alapegyenletek megoldása.
(Az értelmezési tartományt nem jelöltük, a k: tetszőleges egész szám.)

Gyökös egyenlet	$\sqrt[n]{x} = a$	$x = a^n$
Exponenciális egyenlet	$a^x = b$	$x = \log_a b = \dfrac{\lg b}{\lg a}$
Logaritmikus egyenlet	$\log_a x = b$	$x = a^b \quad = e^{b \cdot \ln a} = 10^{b \cdot \lg a}$
Trigonometrikus egyenletek	$\sin x = a$	$x_1 = \arcsin a + 2k\pi, \quad x_2 = \pi - x_1$
	$\cos x = a$	$x_1 = \arccos a + 2k\pi, \quad x_2 = 2\pi - x_1$
	$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arc\,tg} a + k\pi$
	$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arc\,ctg} a + k\pi$

4.4.4. *Közelítő módszerek*

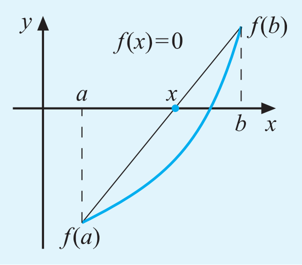
Az $f(x) = 0$ egyenletek gyökeinek közelítő meghatározásához általában egy azt tartalmazó *intervallumot* vagy a gyökhöz közeli *induló értéket* kell keresni. Ezt a becslést kell *ismételten* javítani az alábbi módszerek valamelyikével.

Húrmódszer (regula falsi)

Adott $[a, b]$ intervallumból indulunk, ha: $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Közelítő gyök az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr tengelypontja:

$$x = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}.$$



Érintő módszer (Newton-módszer)

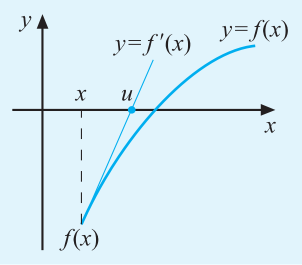
A gyök x_0 közelítő értékéből indulunk.

Szükség van az $f(x)$ deriváltjára: $f'(x) \neq 0$.

Pontosabb gyök az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő tengelypontja:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

(A módszer csak akkor konvergens, ha a zérushelyen a derivált nem 0.)



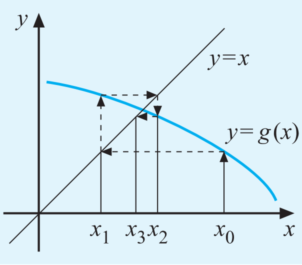
Iteráció

Az $f(x) = 0$ alakú egyenletet $x = g(x)$ alakba írjuk.

A gyök x_0 közelítő értékéből indulunk.

Pontosabb gyök $x_n = g(x_{n-1})$.

(Ha a gyök környezetében $|g'(x)| < 1$ akkor és csak akkor $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a gyökhöz tart.)



4.5. Egyenletrendszerek

4.5.1. Lineáris egyenletrendszer (két ismeretlennel)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Helyettesítő módszer:

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \quad \Rightarrow \quad a_2\frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2.$$

Kiküszöbölés módszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \\ x &= \frac{c_2 - b_2y}{a_2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{c_1 - b_1y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2y}{a_2}.$$

Egyenlő együtthatók módszere:

$$\left.\begin{aligned} a_1a_2x + b_1a_2y &= c_1a_2 \\ -a_1a_2x - b_2a_1y &= -c_2a_1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad (b_1a_2 - b_2a_1)y = (c_1a_2 - c_2a_1).$$

5. VALÓS FÜGGVÉNYTAN

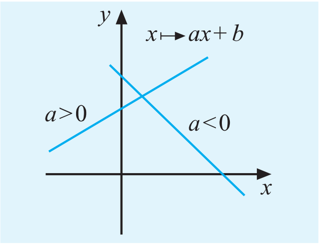
Az itt szereplő függvényeket a valós számok halmazából a valós számok halmazába leképező képletekkel, $y = f(x)$ alakban adom meg. A D-vel jelölt értelmezési tartományt is megadom ott, ahol az nem egyezik a teljes valós számhalmazzal.

5.1. Fontosabb valós függvények

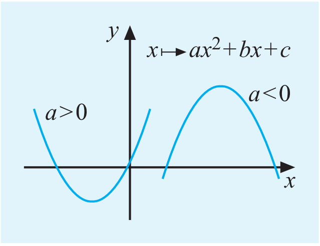
5.1.1. Racionális egész függvények

Hatványfüggvény: $y = x^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$.
Polinomfüggvény: $y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$; $\forall i: a_i \in \mathbb{R}$.

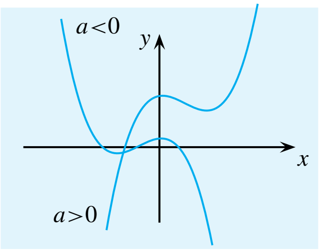
Elsőfokú polinomfüggvény:
$y = ax + b$;
$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.



Másodfokú polinomfüggvény:
$y = ax^2 + bx + c$;
$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.



Harmadfokú polinomfüggvény:
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.



5.1.2. Racionális törtfüggvények

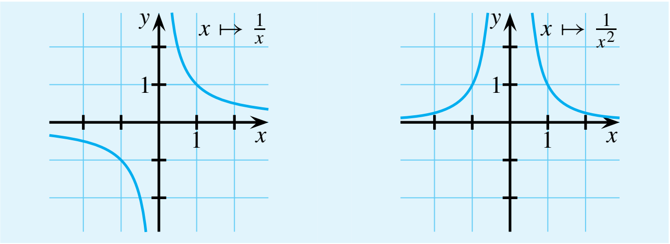
Reciprok hatványfüggvény:

$y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$;

$n \in \mathbb{N}^+$, $D = R \setminus \{0\}$.

Fordított arányosság:

$y = \dfrac{a}{x}$; $a \in \mathbb{R}$, $D = R \setminus \{0\}$.



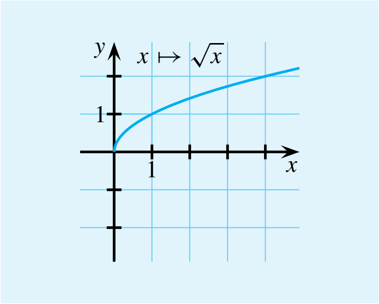
Általános törtfüggvény: $y = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$; $\forall i\colon a_i,\ b_i \in \mathbb{R}$.

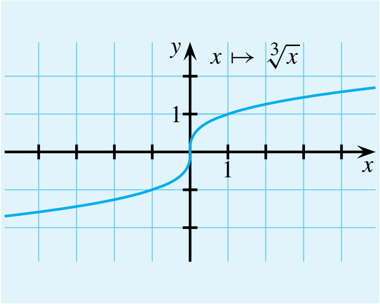
$D = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. (A nevező gyökei kizárva!)

Lineáris törtfüggvény: $y = \dfrac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$; $\forall i\colon a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-b_0}{b_1}\right\}$, $b_1 \neq 0$.

5.1.3. Irracionális függvények

Gyökfüggvények: $y = \sqrt[2k]{x}$; $k \in \mathbb{N}^+$, $D = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. $y = \sqrt[2k-1]{x}$; $k \in \mathbb{N}^+$, $D = \mathbb{R}$.



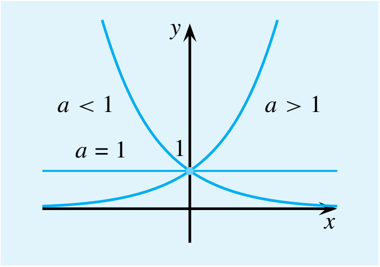


Törtkitevős hatványfüggvény: $y = x^{\pm\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{x^{\pm n}}$; $n, k \in \mathbb{N}^+$, $D = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

5.1.4. Exponenciális és logaritmusfüggvények

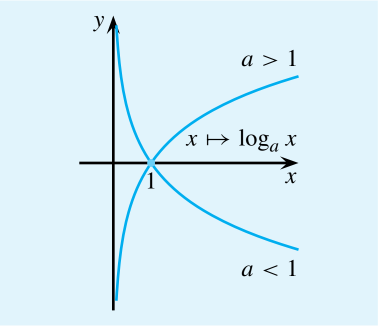
Exponenciális függvény: $y = a^x$; $a \in \mathbb{R}^+$.

$y = e^x = \exp(x)$; $e \approx 2{,}718\,28\ldots$

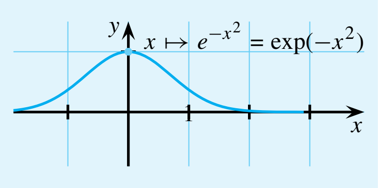


Logaritmusfüggvény: $y = \log_a x;\, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ D = \mathbb{R}^+$.

$y = \ln x = \log_e x; \quad D = \mathbb{R}^+$.

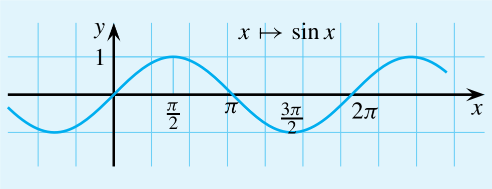


„Haranggörbe”: $y = e^{-x^2} = \exp(-x^2)$.

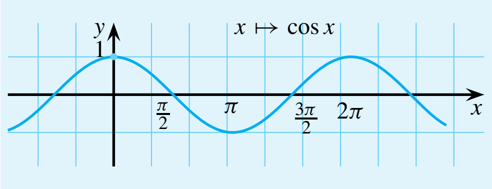


5.1.5. Trigonometrikus függvények

Szinuszfüggvény: $y = \sin(x)$.

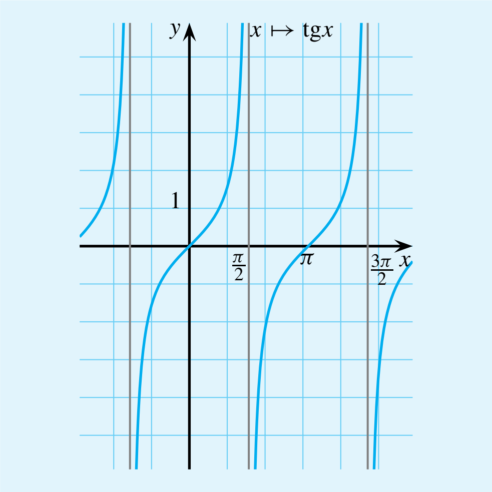


Koszinuszfüggvény: $y = \cos(x)$.



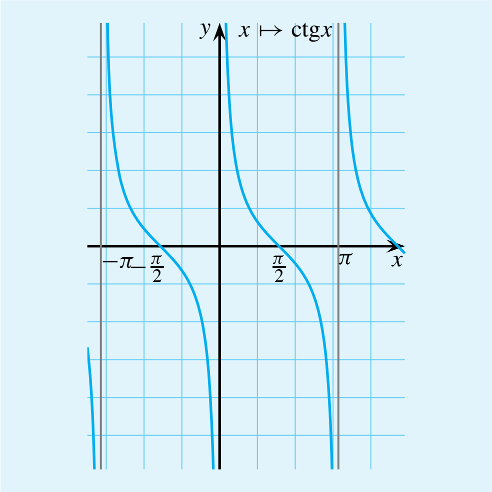
Tangensfüggvény: $y = \mathrm{tg}(x)$;

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \mid x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$.



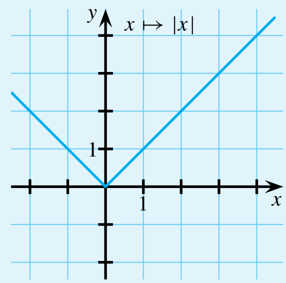
Kotangensfüggvény: $y = \mathrm{ctg}(x)$;

$D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$.



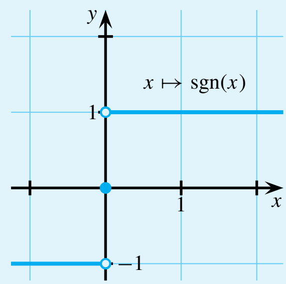
Abszolútértékfüggvény:

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



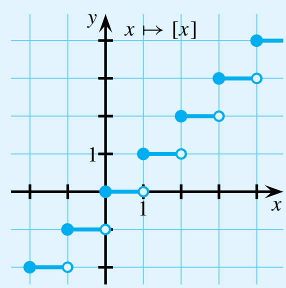
Előjelfüggvény:

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$



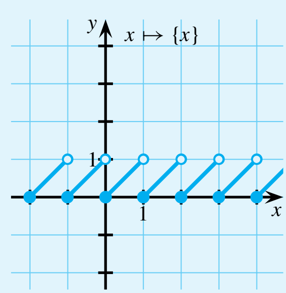
Egészrészfüggvény:

$$y = [x] = n, \quad \text{ha } n \leq x < n + 1,\ n \in \mathbb{Z}.$$



Törtrészfüggvény:

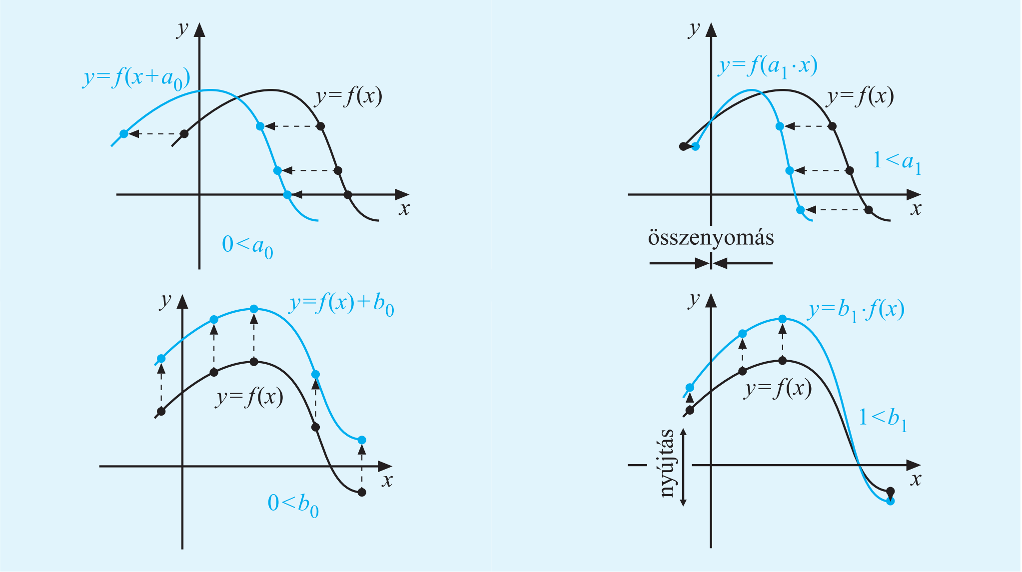
$$y = \{x\} = x - [x].$$



5.1.7. *Függvénytranszformációk*

Az $y = f(x)$ függvény *lineáris transzformáltjai:*
$y = b_1 \cdot f(a_1 x + a_0) + b_0$.
Ezeket a következő négy *elemi transzformáció* kombinálásával kapjuk:

	Hozzárendelés	A grafikon geometriai transzformációja
A változó transzformációja	$y = f(x + a_0)$	Eltolás az x tengely mentén $(-a_0; 0)$ vektorral.
	$y = f(a_1 \cdot x)$	Az y tengelyre merőleges, $\frac{1}{a_1}$ arányú affinitás. (Összenyomás, ha $\lvert a_1 \rvert > 1$, nyújtás ha $\lvert a_1 \rvert < 1$.) Ha $a_1 = -1$, a függvény képe az y tengelyre tükröződik.
A függvényérték transzformációja	$y = f(x) + b_0$	Eltolás az y tengely mentén $(0; b_0)$ vektorral.
	$y = b_1 \cdot f(x)$	Az x tengelyre merőleges, b_1 arányú affinitás. (Összenyomás, ha $\lvert b_1 \rvert < 1$, nyújtás ha $\lvert b_1 \rvert > 1$.) Ha $b_1 = -1$, a függvény képe az x tengelyre tükröződik.



A $b_1 \cdot f(a_1 x + a_0) + b_0$ függvény egy lehetséges ábrázolása az $f(x)$ függvény segítségével lépésről lépésre: $b_1 f(a_1 x + a_0) + b_0 = b_1 f\left[a_1\left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)\right] + b_0$, tehát

$$f(x) \to f\left(x + \frac{a_0}{a_1}\right) \to f\left[a_1\left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)\right] = f(a_1 x + a_0) \to b_1 \cdot f(a_1 x + a_0) \to b_1 \cdot f(a_1 x + a_0) + b_0.$$

Ettől eltérő sorrendben más meggondolásokat kell alkalmazni.

5.2. Határérték

5.2.1. Határérték-számítási szabályok

(A határérték helye a vagy $\pm\infty$ lehet.)
($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans)

$\lim c = c$	$\lim(c \cdot f) = c \cdot \lim f$
$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$	$\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$
$\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim f}{\lim g}$, ha $\lim g \neq 0$	

5.2.2. Néhány nevezetes határérték

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}712\,818\,28\ldots$

5.3. Differenciálszámítás

5.3.1. Deriválási szabályok

($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans)

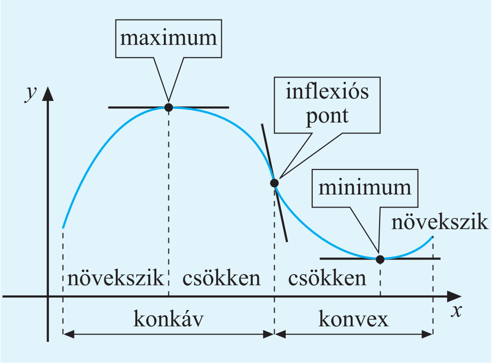
$(c \cdot f)' = c \cdot f'$	
$(f \pm g) = f' \pm g'$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$. (Összetett függvény)	$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'}$. (Inverz függvény)

5.3.2. Elemi függvények deriváltja

$c' = 0$	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	
$(a^x)' = a^x \ln a$,	$(10^x)' \approx 2{,}3026 \cdot 10^x$,	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$,	$(\lg x)' \approx \frac{0{,}4343}{x}$,	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

5.3.3. A függvény menetének vizsgálata

f	$f'(x)$	$f''(x)$
Növekszik	> 0	
Csökken	< 0	
Helyi minimum	$= 0 \;\wedge$ $(-) \to (+)$	> 0
Helyi maximum	$= 0 \;\wedge$ $(+) \to (-)$	< 0
Konvex		> 0
Konkáv		< 0
Inflexiós pont		$= 0 \;\wedge$ $(\pm) \to (\mp)$



5.4. Integrálszámítás

($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans)

5.4.1. Integrálási szabályok

$\int c \cdot f = c \cdot \int f$	$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$	$\int (f \cdot g') = f \cdot g - \int f'g$

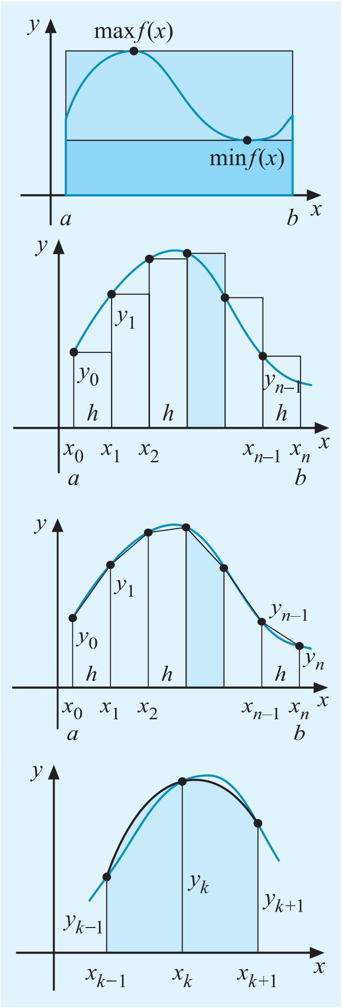
5.4.2. Fontosabb integrálok

$\int c\,dx = c \cdot x + C$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\quad n \neq -1$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int 10^x\,dx = \lg e \cdot 10^x + C$
$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - x + C$	$\int \lg x\,dx = x \cdot (\lg x - \lg e) + C$	$\int \log_a x\,dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$

5.4.3. A határozott integrálás szabályai

$\int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f$	$\int_a^b f = -\int_b^a f$
$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$	$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

5.4.4. A határozott integrál kiszámítása



Becslés:

$$(b-a)\cdot \min f(x) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\cdot \max f(x).$$

Téglalapformula (egyenletes felosztás melletti közelítés):

$$\int_a^b f \approx h\cdot(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}) \approx h\cdot(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n).$$

Trapézformula (egyenletes felosztás melletti közelítés):

$$\int_a^b f \approx h \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Simpson-formula ($n = 2k$ egyenlő részintervallum melletti parabolikus közelítés):

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{3}\cdot(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

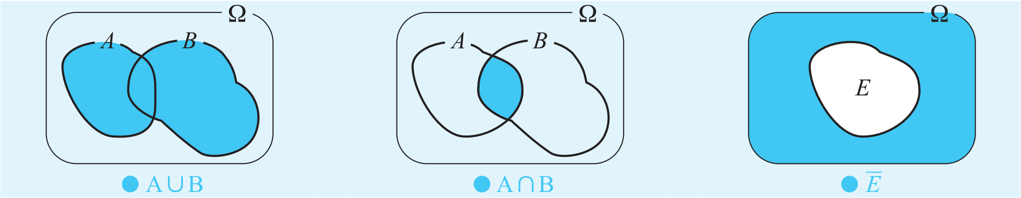
Newton–Leibniz-formula, az integrálszámítás alaptétele:

Ha $[a, b]$-ban f integrálható és $F' = f$, akkor $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

6.1. Események

Elemi esemény: egy kimenetelű, egyféleképpen bekövetkező esemény – $\varepsilon_k = \{\omega_k\}$.

Összetett esemény: két vagy több esemény vagylagos, illetve együttes bekövetkezése.
$A \cup B$:= a két eseményből legalább az egyik bekövetkezik.
$A \cap B$:= mindkét esemény bekövetkezik.



Komplementer esemény: $\overline{E}$, akkor következik be, ha az E esemény nem.

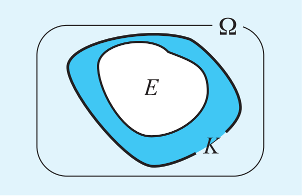
Biztos esemény: Ω, amely az összes lehetséges kimenetelt tartalmazza.

Lehetetlen esemény: $O = \overline{\Omega} = \{\ \}$, amely nem következhet be.

Egymást kizáró események: $A \cap B = O$.

Független események A és B, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Következménye a K esemény az E eseménynek, ha E maga után vonja K-t: $E \subset K$.



Teljes eseményrendszer:
$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m = \Omega \ \wedge \forall i \neq k\colon E_i \cap E_k = O$.
Ha egyikük és csak egyikük következik be.

6.2. Gyakoriság

Az E esemény g_E *gyakorisága* az esemény bekövetkezéseinek száma a kísérlet során.

Az E esemény f_E *relatív gyakorisága* a gyakoriság és a kísérletek számának hányadosa:
$f_E = \dfrac{g_E}{n}$.

Feltételes gyakoriság: egy E esemény kísérleti bekövetkezéseiből azoknak a $k_{E|F}$ száma, amelyek egy másik $F \neq O$ esemény (a feltétel) bekövetkezéseivel együtt fordultak elő.

Feltételes relatív gyakoriság: az $E \cap F$ esemény és az F feltétel gyakoriságának hányadosa:
$f_{E|F} = \dfrac{g_{E \cap F}}{g_F}$.

6.3.1. Definíciók

Az $E \subseteq \wp(\Omega)$ esemény *valószínűsége* egy olyan $P(E) = p_E \in [0;1] \subseteq \mathbb{R}$ szám, amelyet a nagyszámú kísérletben az esemény f_E relatív gyakorisága megközelít.

Kolmogorov-axiómák:

(I.) – a biztos esemény valószínűsége 1; $P(\Omega) = 1$.

(II.) – az egymást páronként kizáró események valószínűsége összeadódik;

$$\forall i \neq j : E_i \cap E_j = O \Rightarrow P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m) = \sum_{k=1}^{m} P(E_k).$$

Klasszikus valószínűségi mező:

– ha az Ω eseménytér véges

– és az elemi események valószínűsége egyenlő: $P(\varepsilon_1) = \ldots = P(\varepsilon_n)$, akkor

a) az elemi események valószínűsége a számuk reciproka; $\forall k$: $P(\varepsilon_k) = \dfrac{1}{n}$.

b) az E esemény valószínűsége a kedvező és a lehetséges kimenetelek számának hányadosa;

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}.$$

Függetlenek az A és B események, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Feltételes valószínűség: az E eseménynek az $F \neq O$ eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűsége

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

6.3.2. Alapvető összefüggések

A lehetetlen esemény valószínűsége zérus; $P(O) = 0$.

A komplementer események valószínűségének összege;

$\forall E \in \wp(\Omega)$: $P(E) + P(\overline{E}) = 1$.

Ha $E_1, E_2, \ldots, E_m$ teljes eseményrendszer, akkor $\sum_{k=1}^{m} P(E_k) = 1$.

Az összes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ elemi eseményre:

$$\sum_{k=1}^{n} P(\varepsilon_k) = 1.$$

Tetszőleges eseményekre: $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m) \leq \sum_{k=1}^{m} P(E_k)$.

Két tetszőleges A, B eseményre:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B).$$

A feltételes valószínűség összefüggései ($F \neq O$):

$$0 \leq P(E \mid F) \leq 1.$$

$$P(E \mid F) = P(E),$$

ha E és F események függetlenek:

$$P(E_1 \mid F \cup E_2 \mid F \cup \ldots \cup E_m \mid F) = \sum P(E_k \mid F),$$

ha egymást páronként kizáró események.

A teljes valószínűség tétele:

Ha $E_1, E_2, \ldots, E_m$ teljes eseményrendszer és $\forall k$: $E_k \neq O$, akkor tetszőleges A-ra

$$P(A) = \sum_{k=1}^{m} P(A \mid E_k) \cdot P(E_k).$$

Bayes tétele:

Ha $E_1, E_2, \ldots, E_m$ teljes eseményrendszer és $\forall k$: $E_k \neq O$, akkor tetszőleges $A \neq O$-ra

$$P(E_k \mid A) = \frac{P(A \mid E_k) \cdot P(E_k)}{\sum\limits_{j=1}^{m} P(A \mid E_j) \cdot P(E_j)}.$$

6.4. Valószínűség-eloszlások

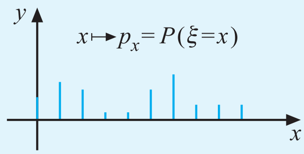
6.4.1. Alapvető összefüggések

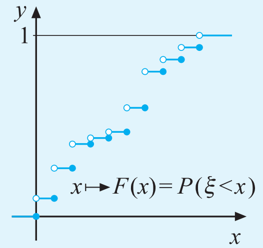
{Az $F(x)$ jelöli az eloszlásfüggvényt, $f(x)$ a sűrűségfüggvényt.}

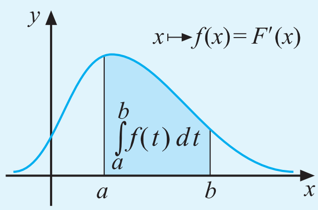
$$F(b) - F(a) = P(a \leq \xi < b) = \begin{cases} \sum\limits_{a \leq x_k < b} p_k \\ \int\limits_a^b f(x)dx \end{cases}$$

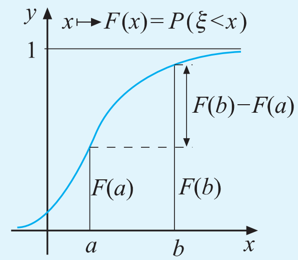
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0. \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$









6.4.2. Eloszlások jellemzői

Várható érték: $M(\xi) = \mu$.

Diszkrét: $\mu = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k$.

Folytonos: $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$, ha az integrál létezik.

Szórás: $D(\xi) = \sigma$;

Variancia (szórásnégyzet): $D^2(\xi) = \sigma^2$.

Diszkrét $\sigma^2 = M[(\xi - \mu)^2] = M(\xi^2) - \mu^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - \mu^2$.

Folytonos $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \mu^2$.

Módus – μ_0: a folytonos sűrűségfüggvény/a diszkrét valószínűségek maximumhelye.

Medián – μ_e: az $F(x) = 0{,}5$ egyenlet gyöke (ha pontosan egy van).

A medián két egyenlő részre osztja az $f(x)$ függvény görbéje alatti területet.

$$\int_{-\infty}^{\mu_e} f(x)dx = \int_{\mu_e}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Variációs köz: az a legszűkebb $[A; F]$ intervallum, amelyre $P(A \le \xi \le F) = 1$.

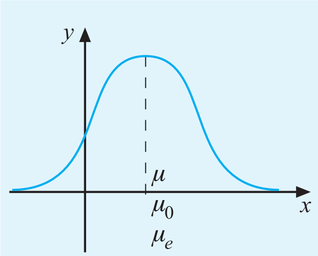
A = alsó határ, F = felső határ.

Terjedelem: a variációs köz hossza – $dR = F - A$.

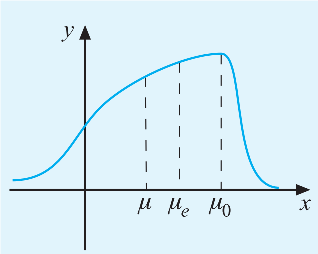
6.4.3. *Eloszlástípusok*

Szimmetrikus az eloszlás az x_0 középpontra, ha $\forall x$: $f(x_0 - x) = f(x + x_0)$;

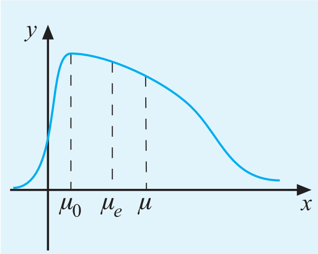
Ha szimmetrikus, akkor $\mu = \mu_e = \mu_0 = \bar{Q} = x_0$. [Fordítva nem igaz!]



szimmetrikus



balra elnyúló



jobbra elnyúló

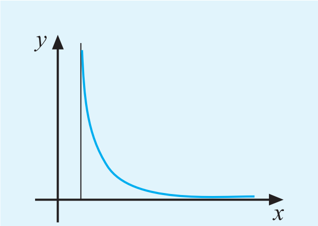
A *szimmetrikus* eloszlásoknál a közepek tipikus elhelyezkedése [kivétel lehet!]:

$\mu < \mu_e < \mu_0$ – bal oldali aszimmetria,

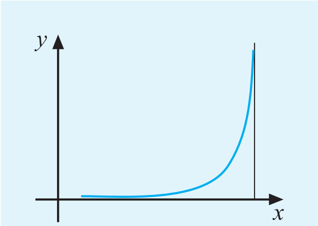
$\mu_0 < \mu_e < \mu$ – jobb oldali aszimmetria.

Egy-, két-, többmódusú az eloszlás, ha a sűrűségfüggvénynek/valószínűségeknek egy, két, több lokális maximuma van. [Unimodális, bimodális, ..., multimodális eloszlások.]

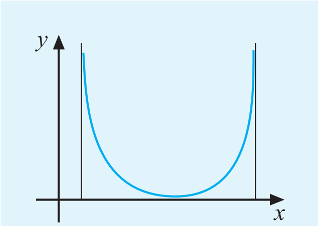
Excentrikus eloszlások: sűrűségfüggvényük/valószínűségeik maximuma a variációs köz szélére esik.



L típus



J típus



U típus

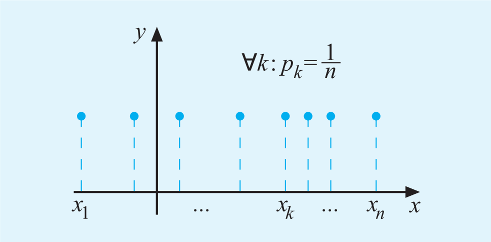
6.4.4. *Nevezetes diszkrét eloszlások*

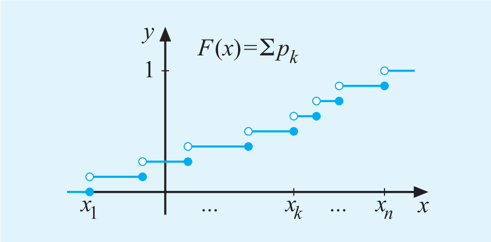
A várható érték jele: $M(\xi) = \mu$, a szórás jele: $D(\xi) = \sigma$.

Az ábrákon az x tengelyen a valószínűségi változót (ξ), az y tengelyen a neki megfelelő valószínűséget ($P(\xi = x)$) szemléltettük.

Egyenletes eloszlás:

$$\xi \in \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}; \quad \forall k\colon \; P(\xi = x_k) = \frac{1}{n}. \; \mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k; \;\; \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2.$$



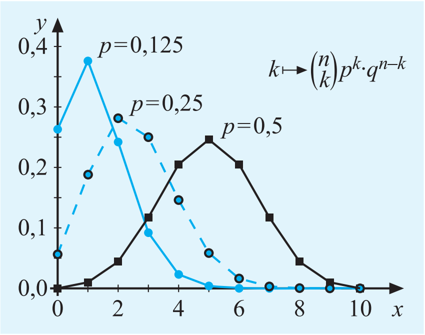


Binomiális eloszlás:

Paraméterek: $n \in \mathbb{N}^+$; $p, q \in \,]0; 1[\ \wedge\ (p+q=1)$.

$\xi \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$; $\quad \forall k\colon\ P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$;

$\mu = np$; $\qquad \sigma^2 = npq$.

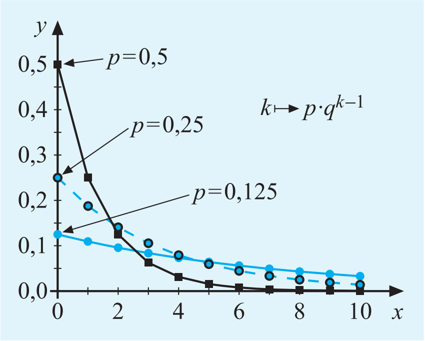


Geometriai eloszlás:

Paraméterek: $p, q \in \,]0; 1[\ \wedge\ (p+q=1)$.

$\xi \in \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$; $\forall k\colon\ P(\xi = k) = p \cdot q^{k-1}$;

$\mu = \dfrac{1}{p}$; $\qquad \sigma^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$.

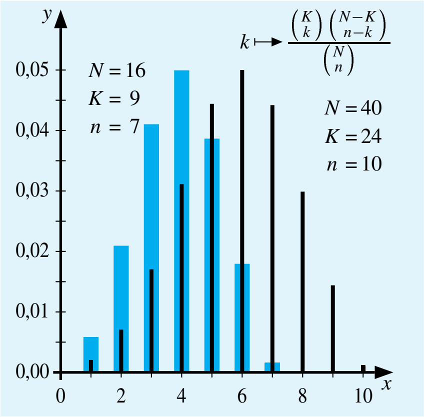


Hipergeometrikus eloszlás:

Paraméterek: $K < N$ adott számok, $K, N, n \in \mathbb{N}$.

$\xi \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; $\qquad \forall k\colon\ P(\xi = k) = \dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$;

$\mu = n \cdot \dfrac{K}{N}$; $\qquad \sigma^2 = n \cdot \dfrac{K}{N} \cdot \dfrac{N-K}{N} \cdot \dfrac{N-n}{N-1}$.

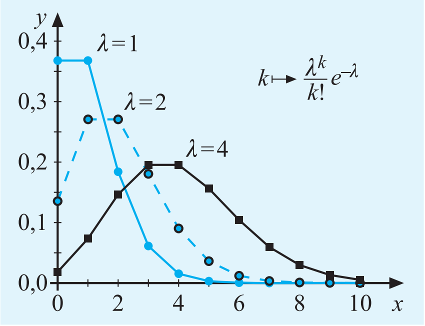


Poisson-eloszlás:

Paraméter: $0 < \lambda \in \mathbb{R}$.

$\xi \in \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$; $\forall k\colon\ P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$;

$\mu = \lambda$; $\qquad \sigma^2 = \lambda$.

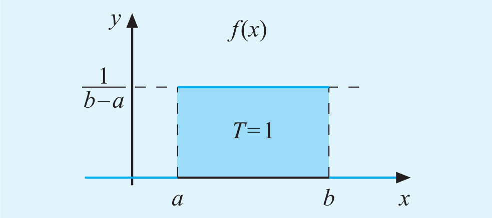


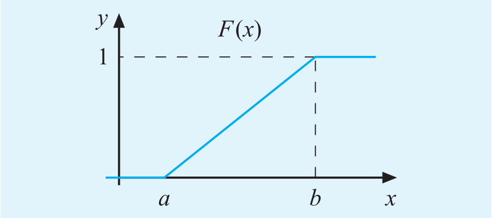
6.4.5. Nevezetes folytonos eloszlások

Egyenletes eloszlás:

$\xi \in [a;b]$; $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 1, & \text{ha } b \le x. \end{cases}$

$\mu = \dfrac{a+b}{2}$; $\quad \sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

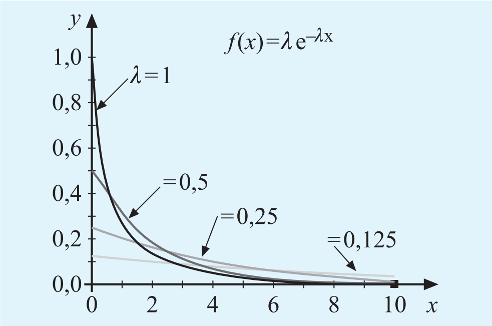


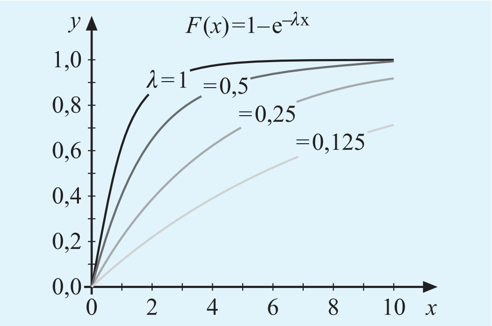


Exponenciális eloszlás: Paramétere: $0 < \lambda \in \mathbb{R}$.

$\xi \in [0;+\infty]$; $\quad f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 \le x \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 \le x \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

$\mu = \dfrac{1}{\lambda}$; $\quad \sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$.



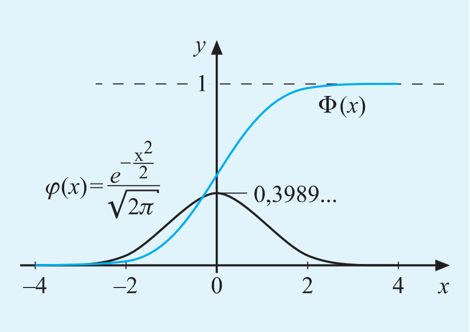


Standard normális eloszlás: Jelölése: $N(0, 1)$.
(lásd 10.14. táblázat, 98. oldal)

$\xi \in [-\infty;+\infty]$; $\quad \varphi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\Phi\,(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ – zárt alakban nem írható fel.

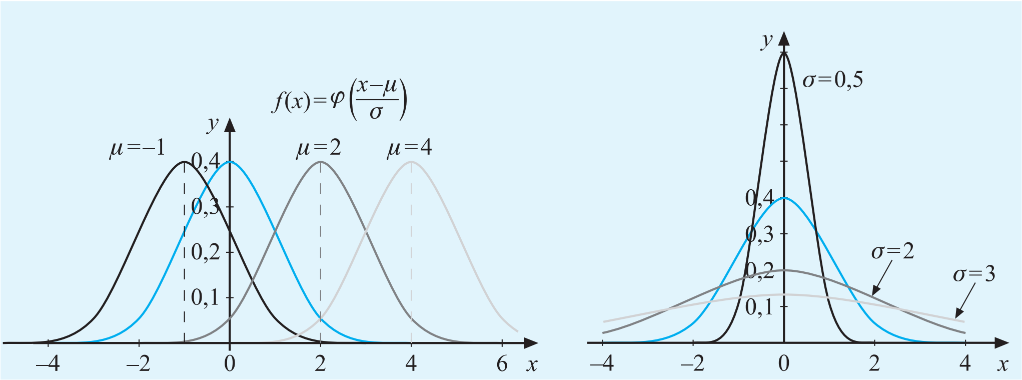
$\mu = 0$; $\quad \sigma^2 = 1$.



Normális eloszlás: Paraméterei: $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Jelölése: $N(\mu, \sigma)$.

$\xi \in [-\infty; +\infty]$; $\quad f(x) = \varphi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$; $\quad F(x)$ zárt alakban nem írható fel.

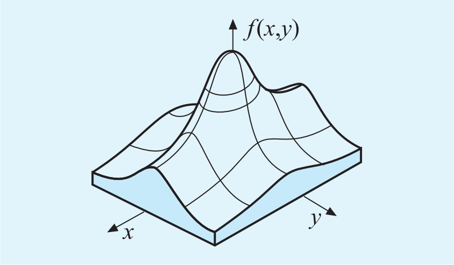
Standardizálás: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ helyettesítéssel.



Kétdimenziós standard normális eloszlás:

$\xi, \eta \in [-\infty; +\infty]$;

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right].$$

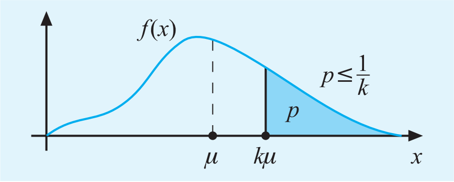


6.4.6. Nevezetes tételek, összefüggések

Markov-féle egyenlőtlenség:

Ha a $0 \le \xi$ valószínűségi változónak véges a várható értéke ($\mu \in \mathbb{R}$), akkor a változó tetszőleges $0 < k\mu$ számot meghaladó értékeinek valószínűsége k reciprokával arányos:

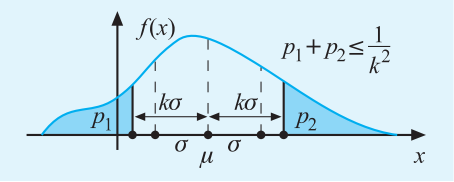
$$P(k\mu \le \xi) \le \frac{1}{k}.$$



Csebisev-féle egyenlőtlenség:

Ha a ξ valószínűségi változónak van várható értéke és szórása ($\mu, \sigma \in \mathbb{R}$), akkor az eloszlásnak az a része, amely a várható érték $k \cdot \sigma$ sugarú környezetén kívül esik, legfeljebb $\dfrac{1}{k^2}$, ahol $k > 1$: $P(|\xi - \mu| \ge k \cdot \sigma) \le \dfrac{1}{k^2}$;
azaz a várható érték $k \cdot \sigma$ sugarú környezetébe legalább az eloszlás $1 - \dfrac{1}{k^2}$ része esik:

$$P(|\xi - \mu| \le k \cdot \sigma) = \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} f(x)dx \ge 1 - \frac{1}{k^2}.$$



A *„3-szigma” szabály:* ha ξ normális eloszlású valószínűségi változó, akkor a várható érték 1σ, 2σ, 3σ sugarú környezetébe esik az eloszlás $\approx 68\%$, $\approx 95\%$, $\approx 99{,}7\%$-a; illetve e környezeteken kívül az $\approx \frac{1}{3}$, $\approx \frac{1}{20}$, $\approx \frac{1}{333}$ része.

Bernoulli tétele: A nagy számok gyenge törvénye

Ha egy kettős kimenetelű kísérletben az egyik kimenetel valószínűsége p és a kísérlet n-szeri elvégzésekor a kimenetel relatív gyakorisága f_n, akkor a relatív gyakoriságnak a valószínűségtől való eltérése n növekedésével egyre valószínűtlenebb:

$$\lim_{n\to\infty} P(|f_n - p| > \varepsilon) = 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Borel tétele: A nagy számok erős törvénye

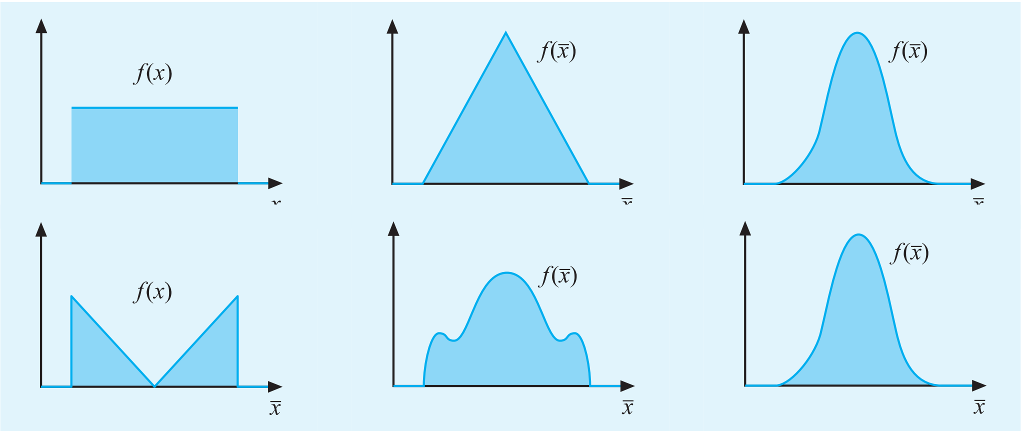
Ha egy kettős kimenetelű kísérletben az egyik kimenetel valószínűsége p és a kísérlet 1, 2, ..., n, ...-szeri elvégzésekor a kimenetel relatív gyakorisága $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, akkor

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n} = p\right) = 1.$$

A központi határeloszlás-tétel:

Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ azonos eloszlású – $\forall i$: $(\mu = \mu_i) \wedge (\sigma = \sigma_i)$ –, független és véges szórású változók, akkor a $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ valószínűségi változó az n növekedésével közelít az $N[\mu, \sigma]$ normális eloszláshoz.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$



A populáció sűrűségfüggvénye | Az átlag megoszlása $n = 2$ mintából | Az átlag megoszlása $n = 5$ mintából

7.1. Adatok feldolgozása, ábrázolása

7.1.1. Általános jelölések

n – mintanagyság, a minta elemeinek száma.

m – osztályközök, kategóriák, lehetséges értékek száma.

$\mu, \sigma, \mu_e, \mu_0, \ldots$ – a populáció paraméterei: átlag, szórás stb. (görög betűk).

$\bar{x}, s, m_e, m_0, \ldots$ – a mintastatisztikák: átlag, szórás stb. (latin betűk).

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – az adatsor elemei.

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_m$ – osztályközepek.

$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_m$ – a gyakoriságok sora.

$G_1, G_2, G_3, \ldots, G_m$ – a kumulált gyakoriságok sora.

$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ – a relatív gyakoriságok sora.

$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_m$ – a kumulált relatív gyakoriságok sora.

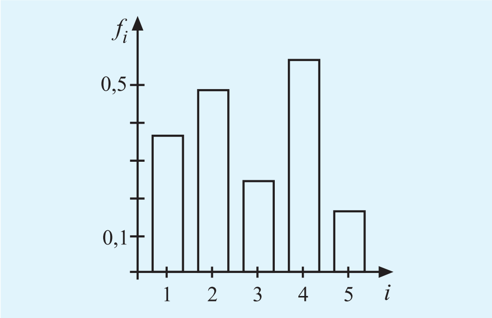
$\sum$ – összegezés jelzése, ha minden elemre vonatkozik.

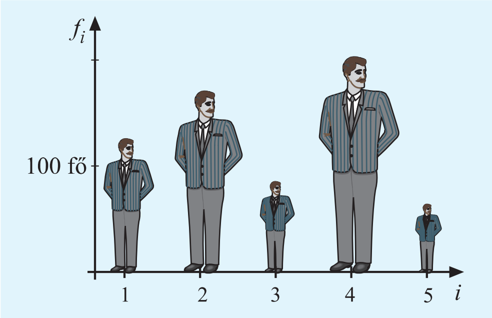
7.1.2. Gyakorisági sorok

$\sum g_i = n$	$G_i = \sum_{k=1}^{i} g_k; \quad G_m = n$	$f_i = \frac{g_i}{\sum g_i} = \frac{g_i}{n}; \quad \sum f_i = 1$	$F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k; \quad F_m = 1$

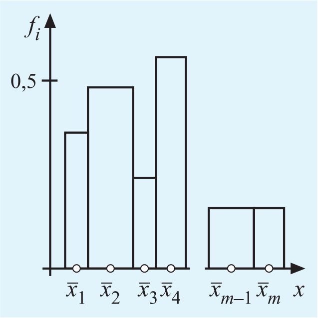
7.1.3. Diagramok

Oszlopdiagram: az abszcisszatengely tetszőleges pontjaiban azonos alapú és a g_i vagy az f_i gyakoriságokkal arányos magasságú téglalapok, 3 dimenziós oszlopok, alakok alkotják.

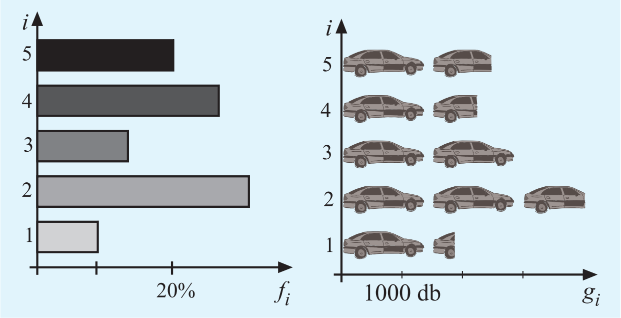




Hisztogram: az osztályközök fölé emelt g_i vagy f_i magasságú téglalapok.

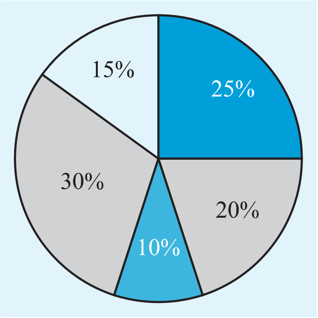


Szalagdiagram – sávdiagram: az oszlopdiagram 90 fokkal elforgatva.

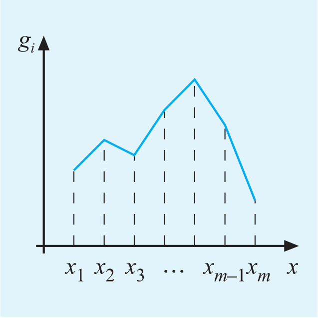


Kördiagram: a g_i vagy az f_i gyakoriságokat c_i szögű körcikkek ábrázolják,

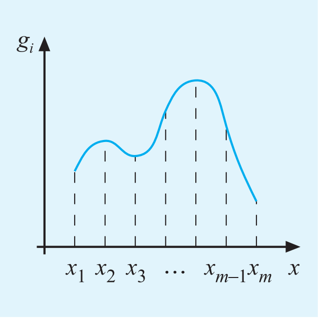
$$\forall i : c_i = \frac{360^\circ}{n} \cdot g_i = 360^\circ \cdot f_i .$$



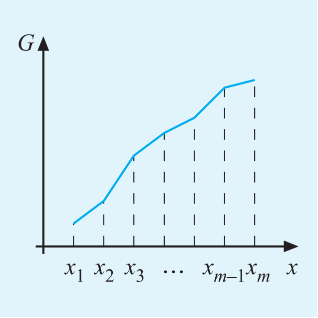
Gyakorisági grafikonok:



poligon



görbe



ogiva

7.2.1. Közepek, átlagok

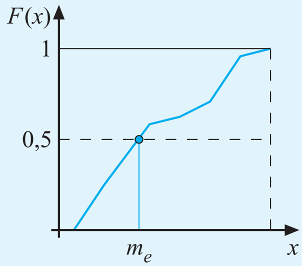
Aritmetikai közép	$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$
Súlyozott aritmetikai közép	$x' = \dfrac{s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + \ldots + s_nx_n}{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} s_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}.$
Geometriai közép	$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$
Harmonikus közép	$H = \dfrac{n}{\sum \dfrac{1}{x_i}};\quad \dfrac{n}{H} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}.$
Négyzetes közép	$Q = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}.$

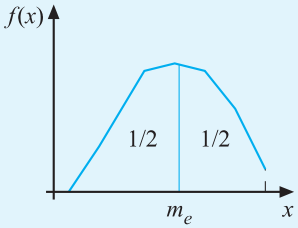
Mintaközép, standard középérték:

az adatsorból számolva: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}.$

a gyakorisági sorokból: $\bar{x} = \dfrac{\sum g_i\bar{x}_i}{\sum g_i} = \sum f_i\bar{x}_i.$

Medián – m_e: a nagyság szerint rendezett adatsor
- középső eleme, ha n páratlan;
- a két középső elem átlaga, ha n páros.

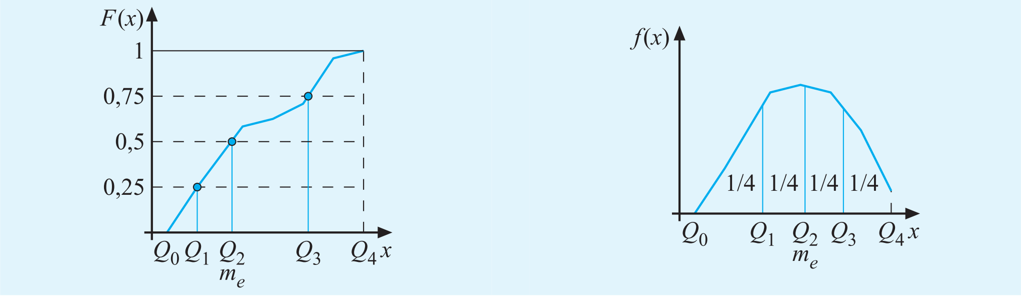




Percentilisek – $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$: a rendezett adatsort 100 egyenlő részre tagolják.

Kvartilisek– Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4: a rendezett adatsort 4 egyenlő részre tagolják.

$[\min(x_i) = A = Q_0, \quad Q_4 = F = \max(x_i)$ és $m_e = Q_2]$



Kvartilisközép: $q = \dfrac{Q_1 + Q_3}{2}$.

Módus – m_0: a rendezett gyakorisági sor maximumhelye.

Modális köz: osztályköz/intervallum, amelybe a legnagyobb adat, gyakoriság esik.

Nyersmódus – x_0: a modális köz közepe.

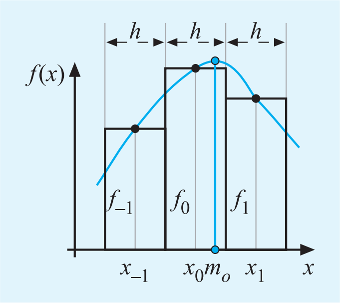
A módus helyesbítése parabolikus interpolációval:

$$m_0 = x_0 - \frac{f_{+1} - f_{-1}}{2(f_{-1} - 2f_0 + f_{+1})} \cdot h,$$

h az osztályközök szélessége,

f_0 a modális köz relatív gyakorisága,

f_{-1} és f_{+1} a két szomszédos köz gyakorisága.



7.3. A szóródás jellemzői

Terjedelem: a legnagyobb és a legkisebb adat különbsége,

$F - A = \max(x_i) - \min(x_i)$.

Kvartiliseltérés: a felső és az alsó kvartilis különbségének fele,

$$dQ = \frac{Q_3 - Q_1}{2}.$$

Szimmetria esetén: $Q_1 = q - dQ, \quad Q_3 = q + dQ$.

Középeltérés: a mediántól való abszolút eltérések számtani közepe,

$$d = \overline{|x_i - m_e|} = \frac{\sum |x_i - m_e|}{n} = \frac{\sum g_i \cdot |\bar{x}_i - m_e|}{\sum g_i} = \sum f_i \cdot |\bar{x}_i - m_e|.$$

Relatív középeltérés: $d' = \dfrac{d}{m_e}$.

Variancia (*szórásnégyzet*), a mintaközéptől való eltérések négyzetes közepe

$$s^2 = \overline{(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum g_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{\sum g_i} = \sum f_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2.$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum g_i \cdot \bar{x}_i^2}{\sum g_i} - (\bar{x})^2 = \sum f_i \cdot \bar{x}_i^2 - (\bar{x})^2.$$

Szórás: a variancia négyzetgyöke

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\overline{(x^2)} - (\bar{x})^2}.$$

Relatív szórás: $s' = \dfrac{s}{\bar{x}}$.

7.4. Szimmetria és lapultság

A *ferdeség* (aszimmetria) gyakorlatban használt mérőszámai:

$$g = \frac{\bar{x} - m_0}{s} \text{ és } g' = \frac{q - m_e}{dQ}.$$

Negatív értékek jobb oldali, pozitív értékek bal oldali aszimmetriát jeleznek.

A *lapultság* gyakorlatban használt mérőszáma:

$$l = \frac{\overline{(x_i - \bar{x})^4}}{s^4}.$$

A normális eloszlásnál $l = 3$;
az $l > 3$ ennél csúcsosabb,
az $l < 3$ pedig laposabb eloszlást jelez.

7.5. Korreláció, regresszió

A statisztikai modell: az adatsor a minta elemeinek két ismérvét tartalmazza.
Matematikai modell: a mérés a minta i-edik eleméhez hozzárendeli a sík egy pontját –

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad i \mapsto (x_i, y_i).$$

7.5.1. Általános jelölések

$1, 2, \ldots, i, \ldots, n$ – az elemek indexe,

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – az egyik adatsor elemei,

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ – a másik adatsor elemei.

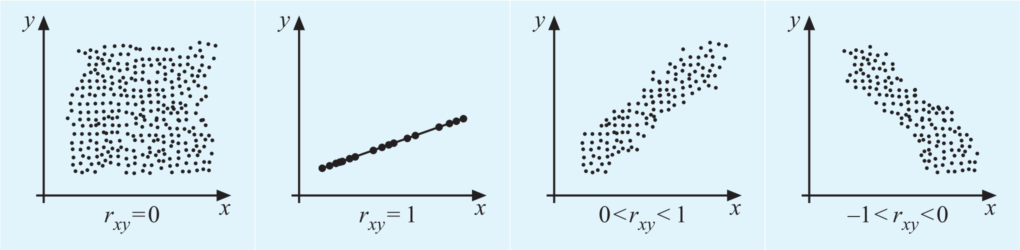
7.5.2. Korreláció

Kovariancia: $\mathrm{Cov}(x, y) = \dfrac{\sum[(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{n}$.

$$\mathrm{Cov}(x, y) = \overline{(x \cdot y)} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{\sum(x_i \cdot y_i)}{n} - \frac{\sum x_i}{n} \cdot \frac{\sum y_i}{n}.$$

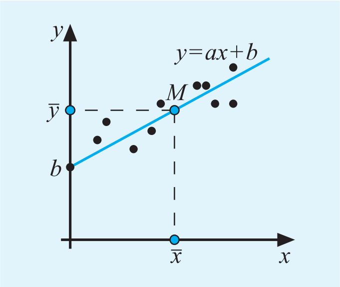
Korrelációs együttható: $r_{xy} = \dfrac{\mathrm{Cov}(x, y)}{s_x \cdot s_y}$, ahol s_x és s_y a két adatsor szórása.

Ha $|r| = 1$ – a két ismérv *szoros* (lineáris) korrelációs kapcsolatban van.
Ha $r = 0$ – x és y *korrelálatlanok* (nem feltétlenül függetlenek!).



7.5.3. Lineáris regresszió

Regressziós egyenes: (az y változónak az x-re vonatkozó regressziós egyenese) az $y = a \cdot x + b$ egyenletű egyenes, amitől a minta ponthalmazának ordinátairányú eltéréseinek négyzetösszege $\sum(a \cdot x_i + b - y_i)^2$ minimális.



Regressziós együttható:

$$a = \frac{\overline{(x \cdot y)} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{(x^2)} - (x)^2} = \frac{n \cdot \sum(x_i \cdot y_i) - \left(\sum x_i\right) \cdot \left(\sum y_i\right)}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}.$$

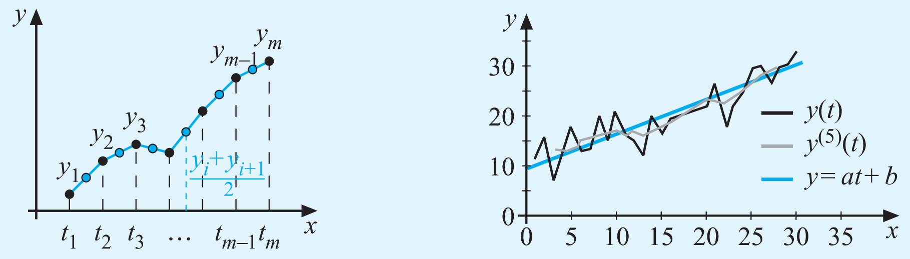
Tengelymetszet: $b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} = \dfrac{\sum y_i - a \cdot \sum x_i}{n}$.

[A regressziós egyenes átmegy az $M(\bar{x}, \bar{y})$ ponton.]

7.6. Idősorok

Egyenlő időközökben – $t_1, t_2, \dots, t_n$ – mért $y_1, y_2, \dots, y_n$ adatsor.

Kronologikus átlag: $$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1} = \frac{\frac{y_1}{2} + \left(\sum_{i=2}^{n-1} y_i\right) + \frac{y_n}{2}}{n-1}.$$



Mozgó átlagok sora:

3 tagú mozgó átlagok sora: $y_2^{(3)}, y_3^{(3)}, \dots, y_{n-1}^{(3)}$; $y_i^{(3)} = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3}$.

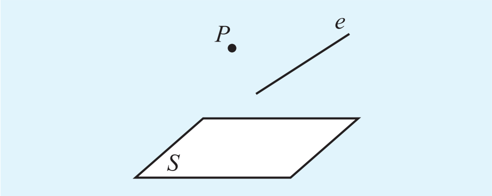
5 tagú mozgó átlagok sora: $y_3^{(5)}, y_4^{(5)}, \dots, y_{n-2}^{(5)}$; $y_i^{(5)} = \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{5}$.

Lineáris trend = a regressziós egyenes: $y = a \cdot t + b$.

8. ELEMI GEOMETRIA

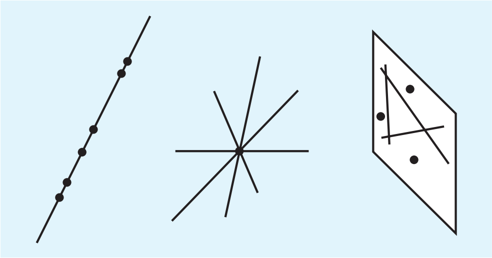
8.1. Térelemek

a pont, az egyenes, a sík.

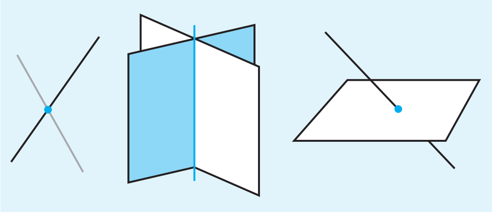


A térelemek kapcsolata

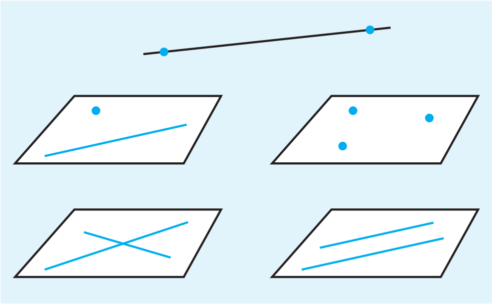
Illeszkedő két térelem, ha egyik tartalmazza a másiknak minden pontját.
Kollineárisak azok a pontok, amelyek ugyarra az egyenesre illeszkednek.
Konkurensek azok az egyenesek, amelyek ugyanarra a pontra illeszkednek.
Komplanárisak azok a pontok/egyenesek, amelyek ugyanarra a síkra illeszkednek.



Közös része – metszete – két alakzatnak a közös pontjaik halmaza.
Metszéspont: két egyenes közös pontja.
Metszésvonal: két sík közös egyenese.
Döféspont: egyenes és sík közös pontja.



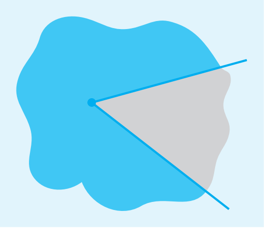
Összekötője – közös tartója – több térelemnek az, amelyre mind illeszkedik.



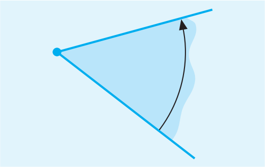
8.2. Szögek

8.2.1. Szög – szögtartomány

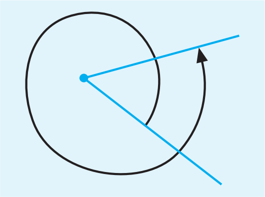
Egy pontból induló két félegyenes a síkot két *szögtartományra* bontja.
A szög szárai a szögtartományokat határoló félegyenesek.
A szög csúcsa a szárak közös kezdőpontja.
A szögvonalat a szögtartományt kijelölő félegyenesek alkotják.



Irányított szöget – szögtartományt kapunk, ha a szárak sorrendjét is előírjuk.



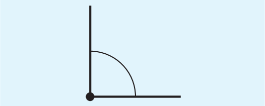
Forgásszöghöz jutunk, ha egy félegyenest a kezdőpontja körül forgatunk.



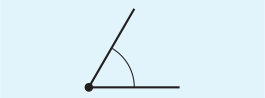
Szögek

Az egyenesszög két szára egy egyenest alkot, a szögtartományok félsíkok.

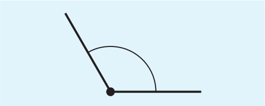
Derékszög – rectus – az egyenesszög fele, szögtartománya a „negyedsík”.



Hegyesszög [tartománya] kisebb a derékszögnél.

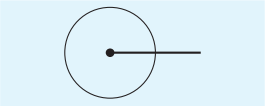


Tompaszög [tartománya] nagyobb a derékszögnél, de kisebb az egyenesszögnél.



Nullszög szárai egybeesnek, a szögtartományt ezeknek a pontjai alkotják.

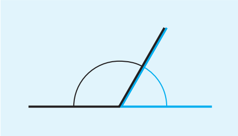
Teljesszög szárai egybeesnek, a szögtartomány a teljes sík.



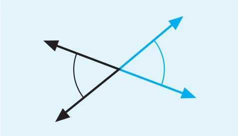
Konvex szög a null-, a hegyes-, a derék-, a tompa- és az egyenesszög.
Konkáv szög [tartománya] nagyobb az egyenesszögnél.

Szögpárok

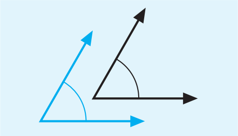
Mellékszögek szögtartományai együtt egy félsíkot alkotnak.
Csúcsszögek szárai páronként egymás meghosszabbításai.
Egyállású szögek szárai azonos irányú párhuzamos félegyenesek.
Váltószögek szárai ellentétes irányú párhuzamos félegyenesek.



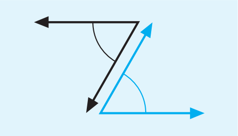
Mellékszögek



Csúcsszögek



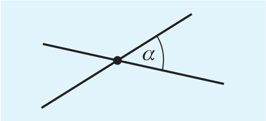
Egyállású szögek



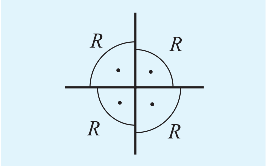
Váltószögek

Pótszögek összege egy derékszöggel egyenlő.
Kiegészítő szögek összege egy egyenesszög = két derékszög.

Hajlásszög a két metsző egyenes által alkotott szögek közül az, amelyik a másiknál kisebb vagy egyenlő (egyenesszögnél).



Merőleges két egyenes, ha négy derékszögre [szögtartományra] osztják a síkot.



Szögmértékek:

A teljesszög mértéke 360° (fok) = 400^{g} (*gon*, újfok) = 2π (radián) = 6000^{v} (vonás).

A kisebb egységek: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$, illetve $1^{g} = 100^{c}$, $1^{c} = 100^{cc}$.

A körben egy szög radiánban vett mértéke a hozzá tartozó ív hossza és a sugár aránya. Az 1 radiánhoz tartozó ív hossza a sugárral egyenlő: 1 rad ≈ 57,3°.

8.3. Geometriai transzformációk

Transzformáció: egyértelmű pont-pont megfeleltetés, leképezés: $P \mapsto P'$.

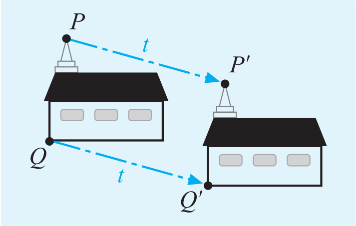
8.3.1. Elemi síktranszformációk

Identitás: bármely pontnak önmaga a képe.

Eltolás (párhuzamos eltolás): $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \mathbf{t}$.

Az eltolást az irányával és a nagyságával, az *eltolásvektorral* adjuk meg.

Fixelemek: az eltolás irányával párhuzamos egyenesek.

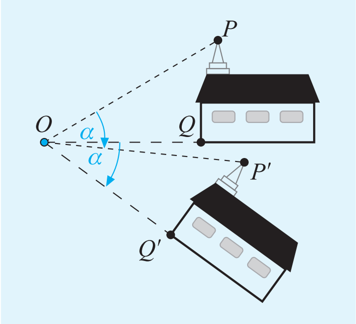


Elforgatás (pont körüli forgatás):

$POP'\sphericalangle = QOQ'\sphericalangle = \alpha$.

Az elforgatást a középponttal, az elforgatás irányával és szögével adjuk meg.

Fixelem: csak a középpont.

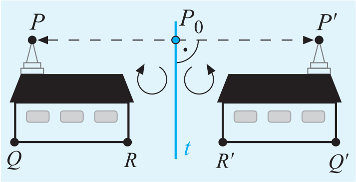


Tükrözés egyenesre (tengelyes tükrözés):

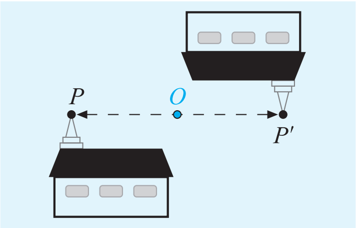
$\overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{P_0P'}$, $PP' \perp \mathbf{t}$.

A tükrözést a tengelyével adjuk meg.

Fixelemek: a tengely pontonként, a tengelyre merőleges egyenesek.



Tükrözés pontra (középpontos tükrözés):

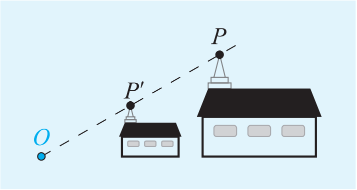


$\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OP'} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} : \overrightarrow{OP} = -1.$

A tükrözést a centrumával adjuk meg.

Fixelemek: a centrum és a centrumra illeszkedő egyenesek.

Középpontos hasonlóság (homotécia):



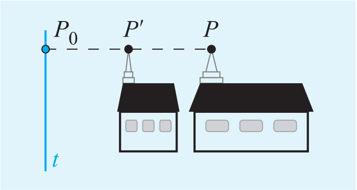
$\overrightarrow{OP'} : \overrightarrow{OP} = k$. A középpontos hasonlóságot a centrumával és a hasonlóság arányával adjuk meg.

Ha $|k| > 1$: nagyítás, ha $|k| < 1$: kicsinyítés, ha $k = 1$: identitás.

Ha $k < 0$: középpontos tükrözés és egy nagyítás/kicsinyítés/identitás egymásutánja.

Fixelemek: a centrum és a centrumra illeszkedő egyenesek.

Merőleges affinitás:



$\overrightarrow{P_0P'} : \overrightarrow{P_0P} = k, \quad PP' \perp \mathbf{t}.$

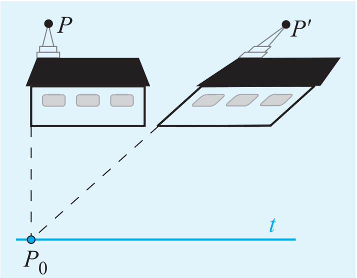
A merőleges affinitást a tengelyével és az affinitás arányával adjuk meg.

Ha $|k| > 1$: nyújtás, ha $|k| < 1$: összenyomás, ha $k = 1$: identitás.

Ha $k < 0$: tengelyes tükrözés és egy nyújtás/összenyomás/identitás egymásutánja.

Fixelemek: a tengely pontonként és a tengelyre merőleges egyenesek.

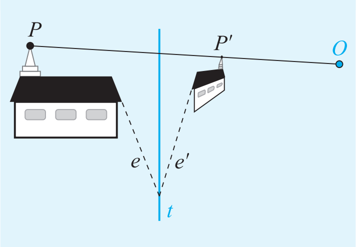
Nyírás:



$\overrightarrow{PP'} : |\overline{P_0P}| = k, \; PP' \| \mathbf{t}.$

Fixelemek: a tengely pontonként és a tengellyel párhuzamos egyenesek.

Centrális-axiális kollineáció:



$PP' \ni O$; $ee' \in t$. (PP' egyenes O-ra, ee' metszéspont t-re illeszkedik.)

Fixelemek: a tengely pontonként, a centrum sugaranként.

8.3.2. Összetett transzformációk:

Véges sok elemi transzformáció egymás után végrehajtva. (Az összetevők sorrendje általában nem cserélhető fel!)

Egybevágóság: identitás, eltolások, forgatások, tükrözések egymásutánja.

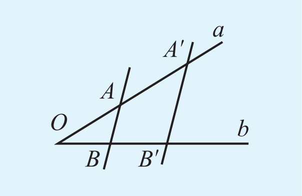
Hasonlóság: egybevágóságok és középpontos hasonlóságok egymásutánja.

Affinitás: hasonlóságok és tengelyes affinitások, nyírások egymásutánja.

Projektivitás: affinitások és centrális-axiális kollineációk egymásutánjai.

8.4.1. Elemi geometriai tételek

Párhuzamos szelők tételei:



Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor

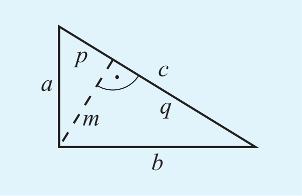
– az egyik száron keletkező metszetek aránya megegyezik a másik száron levő megfelelő metszetek arányával:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB};$$

– a párhuzamosokból a szögszárak által kimetszett szakaszok aránya megegyezik végpontjuk szögcsúcstól mért távolságának arányával:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}.$$

Pitagorasz tétele



A derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege az átfogó négyzetével egyenlő:

$c^2 = a^2 + b^2$. (lásd 10.12. táblázat, 96. oldal)

*Befogótétel (**Eukleidész tétele**)*

A derékszögű háromszögben a befogó az átfogóra eső merőleges vetületének és az átfogónak a mértani közepe:

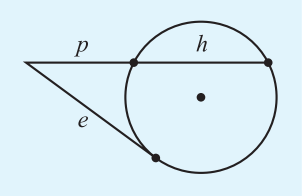
$a^2 = p \cdot c, \qquad b^2 = q \cdot c.$

Magasságtétel (***Eukleidész tétele***)

A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek mértani közepe:

$m^2 = p \cdot q.$

A kör érintője és szelője közötti kapcsolat

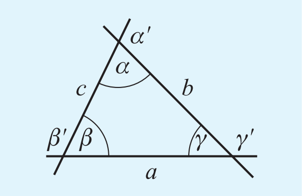


Egy külső pontból a körhöz húzott érintő hossza mértani közepe az e pontból húzott szelő két szeletének:

$e^2 = p \cdot (p + h).$

8.4.2. A háromszög nevezetes tulajdonságai

Az oldalak és szögek viszonyai:



Bármelyik két oldal összege nagyobb a harmadiknál:

$a + b > c$; $a + c > b$; $b + c > a$.

A nagyobb oldallal szembeni szög nagyobb és a nagyobb szöggel szembeni oldal nagyobb:

$a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

A belső szögek összege az egyenesszöggel egyenlő:

$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ$.

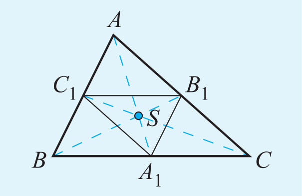
A külső szögek összege a teljesszöggel egyenlő:

$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2\pi = 360^\circ$.

A külső szög a másik két belső szög összegével egyenlő:

$\alpha' = \beta + \gamma$; $\beta' = \alpha + \gamma$; $\gamma' = \alpha + \beta$.

Súlyvonal, középvonal, súlypont:

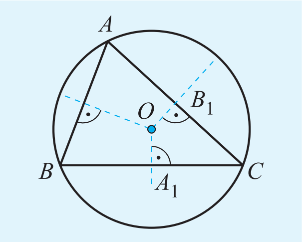


A háromszög súlyvonala a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő egyenes szakasz: AA_1, BB_1, CC_1.
Az S súlypont a három súlyvonal egyetlen közös pontja. A súlypont mindegyik súlyvonalat 2 : 1 arányban osztja [a csúcshoz közelebbi szakasz a nagyobb].

$BA_1 = A_1C$, $AB_1 = B_1C$, $AS : SA_1 = 2 : 1$.

A középvonalak az oldalfelezőpontokat összekötő szakaszok: $2 \cdot B_1C_1 = BC$.

Oldalfelező merőleges, körülírt kör:

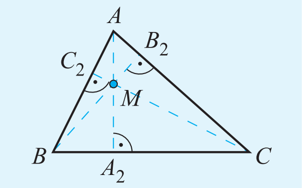


Az oldalfelező merőleges a háromszög oldalának felezőpontjában emelt merőleges egyenes: A_1O, B_1O, C_1O.
A háromszög körülírt köre a három csúcsponton megy keresztül, O középpontja az oldalfelező merőlegesek egyetlen közös pontja:

$BA_1 = A_1C$, $AB_1 = B_1C$,

$OA_1 \perp BC$, $OB_1 \perp AC$.

Magasságvonal, magasságpont:



A magasságvonal a háromszög csúcsából a szemköztes oldalegyenesére bocsátott merőleges szakasz: A_2A, B_2B, C_2C.
Az M magasságpont a három magasságvonal egyetlen közös pontja.

$AA_2 \perp BC$,

$BB_2 \perp AC$.

Szögfelezők, beírt kör, hozzáírt körök:

A szögfelezők a csúcsra illeszkedő, a belső vagy a külső szöget felező félegyenesek.

A beírt kör a belső szögfelezők egyetlen közös K pontja körül írt, az oldalakat érintő kör.

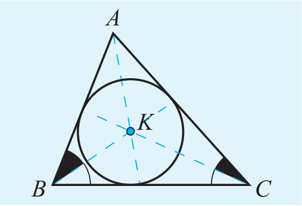
A hozzáírt körök egy belső és két külső szögfelező közös pontja körül írt, az oldalegyeneseket érintő körök.

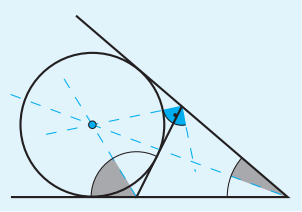
Az egy csúcshoz tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra.

A belső szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában metszi.

$ABK\sphericalangle = KBC\sphericalangle,$

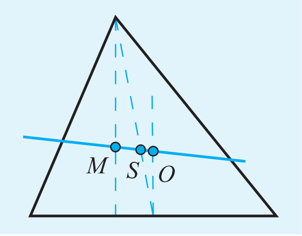
$CK : KA = CB : AB.$





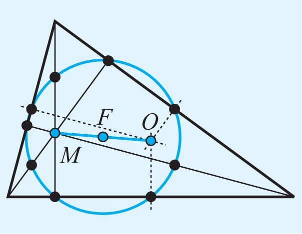
Euler-egyenes:

A háromszög M magasságpontja, S súlypontja és a körülírt kör O középpontja egy egyenesen van, és az MO szakaszt a súlypont $MS : SO = 2 : 1$ arányban osztja.



***Feuerbach-kör* (9 pont köre):**

A háromszög oldalainak felezőpontjai, a magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön fekszenek. E kör F középpontja felezi az M magasságpontot a körülírt kör O középpontjával összekötő szakaszt: $MF = FO$.



8.4.3. Négyszögek

A négy belső szög összege egy teljesszöggel egyenlő:

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi = 360^\circ.$

Különleges négyszögek:

Konvex: minden szöge konvex ($< 180^\circ$).

Trapéz: van párhuzamos oldalpárja.

Ezek a trapéz *alapjai,* a másik kettő a két *szára.*

Deltoid: két-két szomszédos oldala egyenlő.

Átlói merőlegesek, egyikre szimmetrikus. Ez a másiknak felezőmerőlegese.

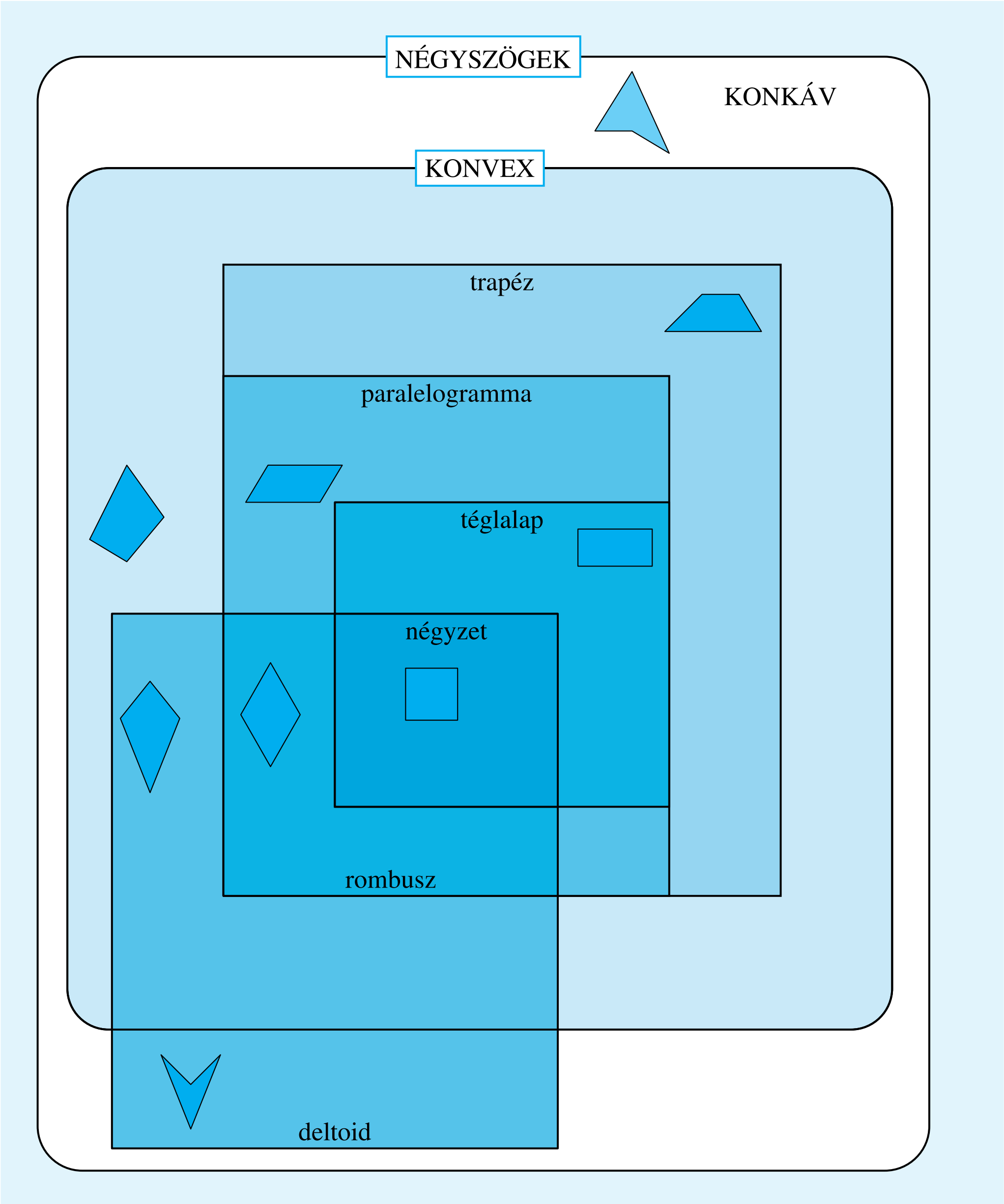
Paralelogramma: mindkét szemköztes oldalpárja párhuzamos.

Szemköztes oldalpárjai, szögpárjai egyenlők, középpontosan szimmetrikus.

Téglalap: derékszögű paralelogramma.

Átlói egyenlők, két tengelyre szimmetrikus.

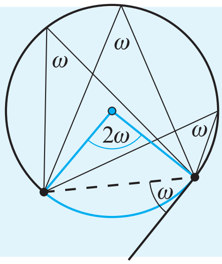
Rombusz: egyenlő oldalú paralelogramma.
Átlói merőlegesek, ezekre szimmetrikus.
Négyzet: egyenlő oldalú és egyenlő szögű paralelogramma.
Négy szimmetriatengelye van.
Húrnégyszög: csúcsai egy körre illeszkednek.
Szemköztes szögpárjainak összege: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.
Érintőnégyszög: oldalai egy kört érintenek.
Szemköztes oldalpárjainak összege megegyezik: $a + c = b + d$.

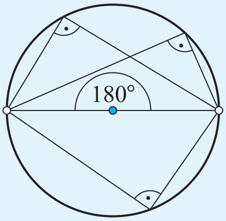


8.4.4. *A kör néhány nevezetes tétele*

Kerületi és középponti szögek:

A kör egy ívéhez (és a vele egyenlő ívekhez) tartozó kerületi szögek egyenlők.
Az ívhez tartozó középponti szög a megfelelő kerületi szögeknek a kétszerese.



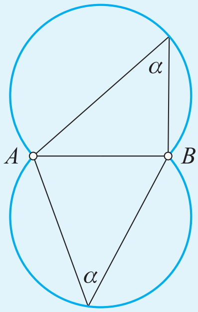


Thalész tétele:

Azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy szakasz derékszögben látszik, két olyan nyílt félkör, amelyeknek a szakasz az átmérője.

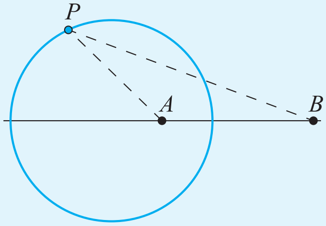
Látókörívek (a ***Thalész-tétel*** általánosítása):

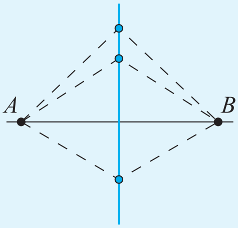
Azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy szakasz $0 < \alpha < 180°$ szögben látszik, két nyílt félkörív, amelyeknek a szakasz egy közös húrja.



Apollóniusz-kör, *szakaszfelező merőleges:*

Azoknak a pontoknak a halmaza, amelyeknek két ponttól való távolságának aránya 1-től különböző állandó, egy kör, amelynek középpontja a két pont összekötő egyenesén fekszik.
Azoknak a pontoknak a halmaza, amelyeknek két ponttól való távolsága egyező, a két pontot összekötő szakaszt merőlegesen felező egyenes.





8.4.5. Síkidomok kerülete (K), területe (T)

A képletekben az a, b, c, … változók az idomok oldalainak, m a magasságnak, r a beírt, R a körülírt kör sugarának, az α, β, γ, … a szögeknek a mérőszámát jelölik. A fel nem sorolt jelölések értelmezésében az ábra ad segítséget. A képletekben $\widehat{\alpha}$, illetve α° az α szög radiánban, illetve fokban mért értékét jelöli.

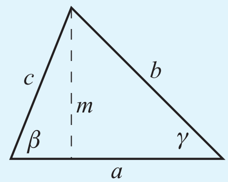
Háromszög:

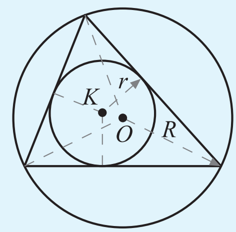
$K = 2s = a + b + c,$

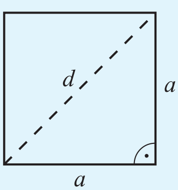
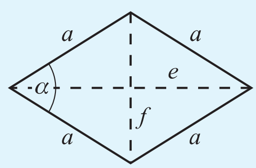
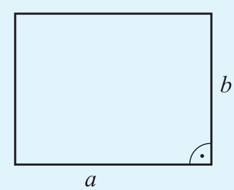
$T = \dfrac{am}{2} = \dfrac{ab\sin\gamma}{2} = \dfrac{abc}{4R} = sr.$

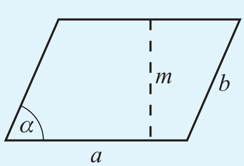
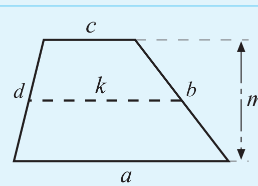
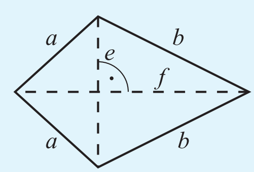
Héron-képlet:

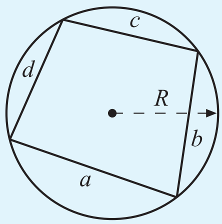
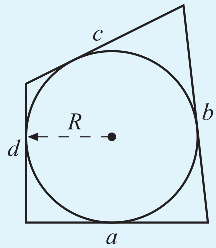
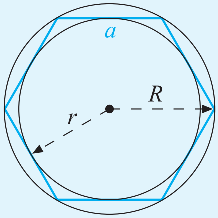
$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

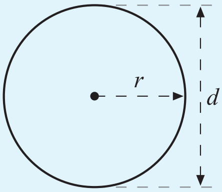
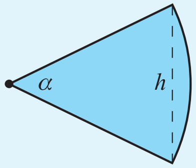
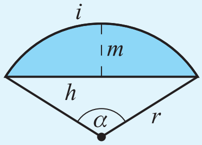


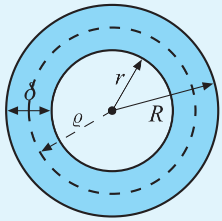
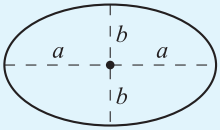
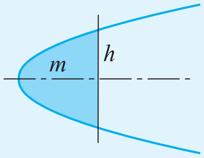


Négyzet:	*Rombusz:*	*Téglalap:*
		
$K = 4a,$	$K = 4a,$	$K = 2(a+b),$
$T = a^2 = \dfrac{d^2}{2}.$	$T = \dfrac{ef}{2} = a^2\sin\alpha.$	$T = ab.$

Paralelogramma:	*Trapéz:*	*Deltoid:*
		
$K = 2(a+b),$	$K = a+b+c+d,$	$K = 2(a+b),$
$T = am = ab\sin\alpha.$	$T = \dfrac{a+c}{2}m = km.$	$T = \dfrac{ef}{2}.$

Húrnégyszög:	*Érintőnégyszög:*	*Szabályos n-szög:*
		
$K = 2s = a + b + c + d$,	$K = 2s = a + b + c + d$,	$K = na$,
$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.	$T = sr$.	$T = \frac{nR^2 \sin\alpha}{2} = \frac{nar}{2}$; $\alpha = \frac{360°}{n}$.

Kör:	*Körcikk:*	*Körszelet:*
		
$K = 2\pi r = \pi d$,	$i = \widehat{\alpha} \cdot r = \frac{\alpha° \cdot r \cdot \pi}{180°}$,	$m = r - \frac{\sqrt{4r^2 - h^2}}{2} = r - r \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$,
$T = \pi r^2 = \frac{d^2\pi}{4}$.	$T = \frac{1}{2} ir = \frac{\widehat{\alpha} r^2}{2} = \frac{\pi\alpha°}{360°} r^2$.	$T = \frac{ir - h(r-m)}{2}$.

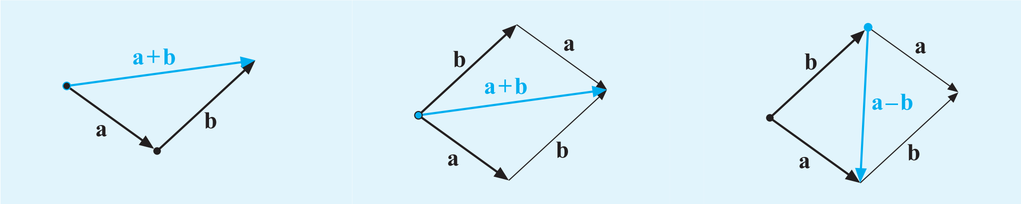
Körgyűrű:	*Ellipszis:*	*Parabolaszelet:*
		
$K = 2\pi(R + r)$,		
$T = \pi(R^2 - r^2) = 2\pi\varrho\delta$. $\delta = R - r$, $\varrho = \frac{R + r}{2}$	$T = \pi ab$.	$T = \frac{2}{3} hm$.

8.5.1. Műveletek vektorokkal

Összeadás-kivonás:

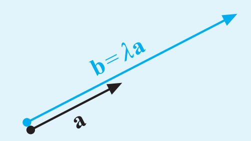
$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, kommutatív. $\quad |\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$.

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, asszociatív. $\quad \mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{c} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

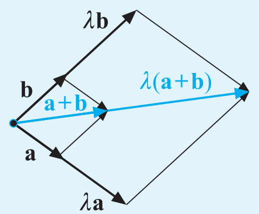


Szorzás skalárral:

$\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a} \;\Rightarrow\; |\mathbf{b}|=|\lambda|\cdot|\mathbf{a}| \;\wedge\; \mathbf{b}\parallel\mathbf{a}$.



$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$, disztributív a vektorösszeadásra.
$(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$, disztributív a skalárösszeadásra.
$(\lambda\mu)\mathbf{a}=\lambda(\mu\mathbf{a})=\mu(\lambda\mathbf{a})$, kommutatív a skalárszorzásra.



Egységvektor ($\mathbf{a}$ irányú egységvektor):

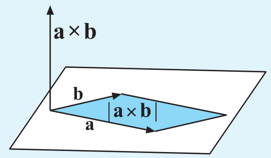
$$\mathbf{a}^0=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{a} \;\Rightarrow\; |\mathbf{a}^0|=1.$$

Skaláris szorzat: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\mathbf{a};\mathbf{b})\sphericalangle$.

Vektoriális szorzat (csak térben!):

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a};\mathbf{b})\sphericalangle$;

$\mathbf{a}\perp(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\perp\mathbf{b}$.



8.5.2. Vektorok koordinátái (síkban)

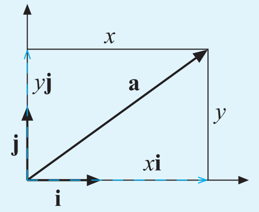
$\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j} \;\Rightarrow\; \mathbf{a}=a(x;y),\; (x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Műveletek

$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=(x_1+x_2)\mathbf{i}+(y_1+y_2)\mathbf{j}$.

$\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2=(x_1-x_2)\mathbf{i}+(y_1-y_2)\mathbf{j}$.

$\lambda\mathbf{a}=\lambda x\mathbf{i}+\lambda y\mathbf{j}$.



Abszolútérték: $|a|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Egységvektor: $\mathbf{a}^0=\dfrac{\mathbf{a}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Skaláris szorzat: $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=x_1x_2+y_1y_2$.

8.6.1. Szögfüggvények (lásd 10.5. táblázat, 88. oldal, 10.6., 10.7. táblázatok, 90. oldal)

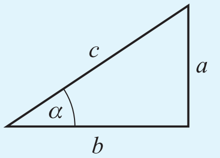
A derékszögű háromszögben az α hegyesszög szögfüggvényei:

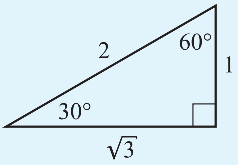
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

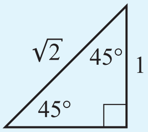
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{szemközti befogó}}{\text{szomszédos befogó}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{szomszédos befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{szomszédos befogó}}{\text{szemközti befogó}}$$







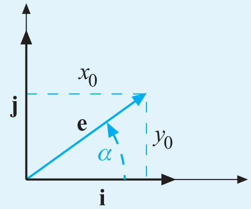
Forgásszögek szögfüggvényei:

A koordináta-rendszer **i** egységvektorából tetszőleges α forgásszöggel elforgatott $\mathbf{e}(x_0; y_0)$ egységvektor koordinátáival az α szögfüggvényei:

$\sin\alpha = y_0, \quad \cos\alpha = x_0,$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_0}{x_0},$ ha $x_0 \neq 0$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x_0}{y_0},$ ha $y_0 \neq 0$



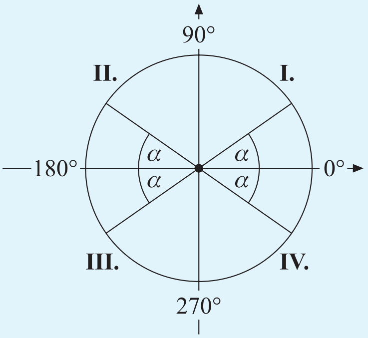
Tetszőleges forgásszögre:

$\sin\alpha = \sin(\alpha + k\cdot 360^\circ),$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + k\cdot 360^\circ),$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k\cdot 180^\circ),$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k\cdot 180^\circ),$ $\forall k \in \mathbb{Z}$



I. $0^\circ \ldots 90^\circ$	**II.** $90^\circ \ldots 180^\circ$	**III.** $180^\circ \ldots 270^\circ$	**IV.** $270^\circ \ldots 360^\circ$
$\sin\alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha)$	$-\sin(\alpha - 180^\circ)$	$-\sin(360^\circ - \alpha)$
$\cos\alpha$	$-\cos(180^\circ - \alpha)$	$-\cos(\alpha - 180^\circ)$	$\cos(360^\circ - \alpha)$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$	$\operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ)$	$-\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$	$\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ)$	$-\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$

8.6.2. Trigonometriai összefüggések

Összefüggések egy szög különböző szögfüggvényei között:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$	$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Két szög összegének/különbségének szögfüggvényei (addíciós tételek):

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$
$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$

Két szögfüggvény összegének/különbségének szorzattá alakítása:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$	$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Kétszeres szögek szögfüggvényei:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ (ahol értelmezve van a tangensfüggvény)	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ (ahol értelmezve van a tangensfüggvény)
$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$

Félszögek szögfüggvényei:

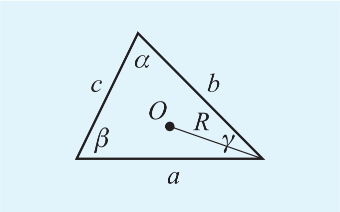
$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$	$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$
$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$	$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

8.6.3. A háromszögek tételei

Szinusztétel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, ahol R a körülírt kör sugara.

Koszinusztétel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Tangenstétel: $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$.



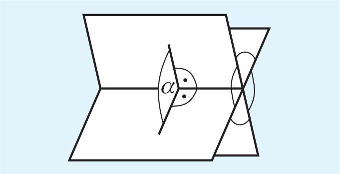
8.7. Térgeometria

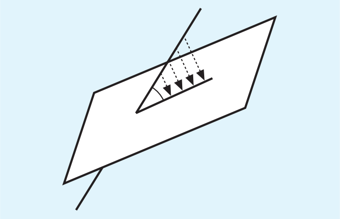
8.7.1. Alapfogalmak, tételek

Lapszög: két metsző sík a teret négy tartományra bontja. Egy ilyen tartomány a határoló félsíkokkal alkotja a lapszöget.

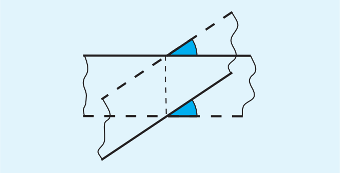
Két sík hajlásszöge a metszésvonalukra emelt merőlegesek hajlásszöge.

Egyenes és sík hajlásszöge az egyenes és síkra merőleges vetületének hajlásszöge.



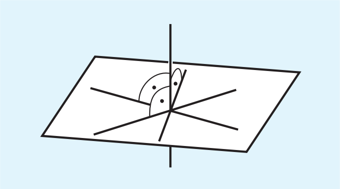


Kitérő egyenesek hajlásszöge a velük párhuzamos metszők hajlásszöge.



Síkra merőleges egyenes tétele:

Ha egy egyenes merőleges a sík két metsző egyenesére, akkor a síkra (annak minden egyenesére) merőleges.

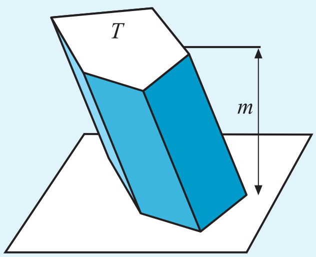


8.7.2. Testek felszíne (A), térfogata (V)

A képletekben az a, b, c, ... változók a testek oldaléleinek vagy alkotóinak, m a test magasságának, T az alaplap területének, P a palást felszínének a mérőszámát jelölik. Az itt fel nem sorolt jelölések értelmezésében az ábra ad segítséget.

Hasábok

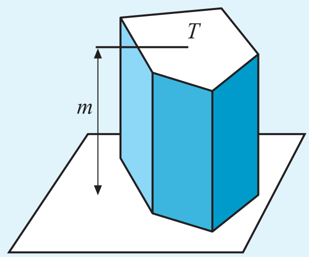
Ferde hasáb:



$A = 2T + P,$

$V = Tm.$

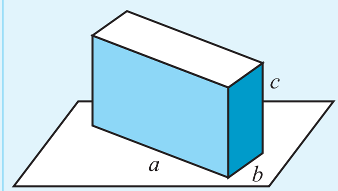
Egyenes hasáb:



$A = 2T + km,$

$V = Tm.$

Téglatest:



$A = 2(ab + bc + ca),$

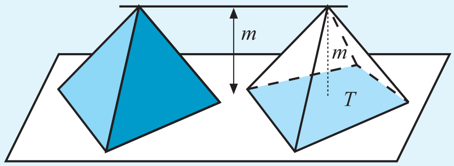
$V = abc.$

Gúlák

Gúla:

$A = T + P,$

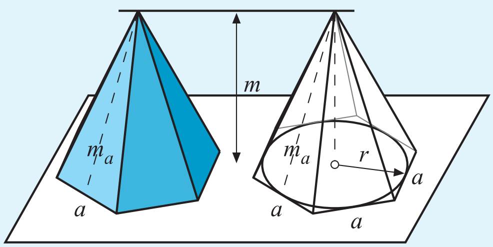
$$V = \frac{Tm}{3}.$$



n-oldalú szabályos gúla:

$$A = \frac{na(r + m_0)}{2},$$

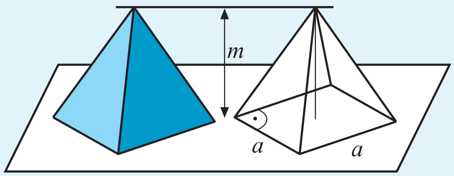
$$V = \frac{narm}{6}.$$



Négyzet alapú egyenes gúla:

$A = a^2 + a\sqrt{4m^2 + a^2},$

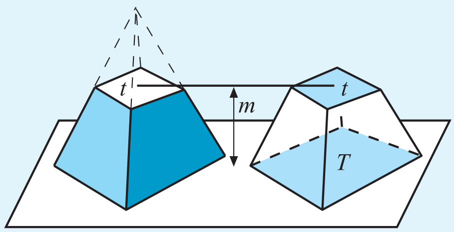
$$V = \frac{a^2 m}{3}.$$



Csonkagúla:

$A = T + t + P,$

$$V = \frac{m(T + \sqrt{Tt} + t)}{3}.$$

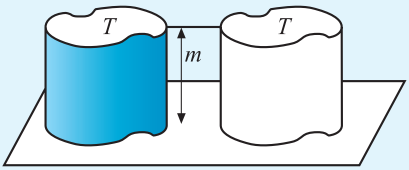


Hengerek

Egyenes henger:

$A = 2T + km,$

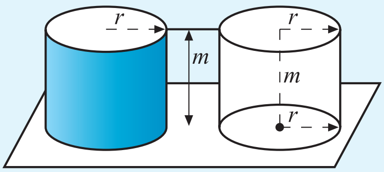
$V = Tm.$



Forgáshenger:

$A = 2\pi r(r + m),$

$V = \pi r^2 m.$

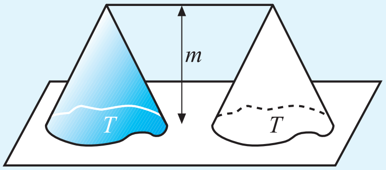


Kúpok

Egyenes kúp:

$A = T + P,$

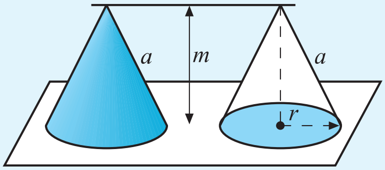
$V = \dfrac{Tm}{3}.$



Forgáskúp:

$A = \pi r(r + a),$

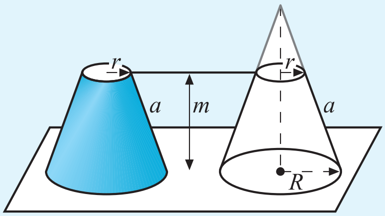
$V = \dfrac{\pi r^2 m}{3}.$



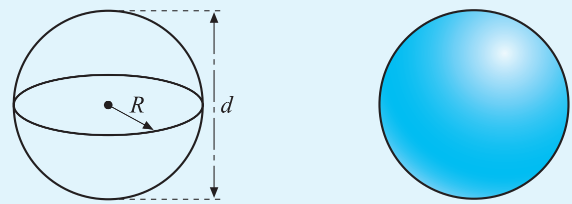
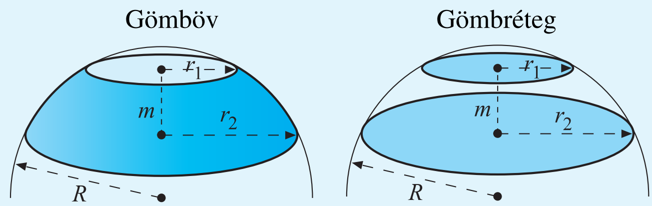
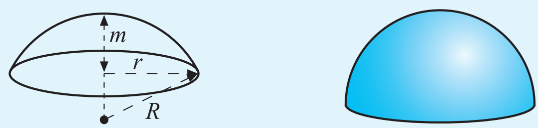
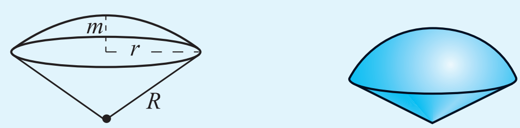
Csonkakúp:

$A = \pi[R^2 + r^2 + a(R + r)],$

$V = \dfrac{\pi m}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$



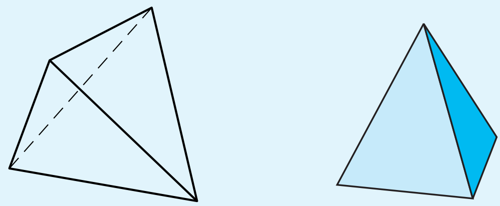
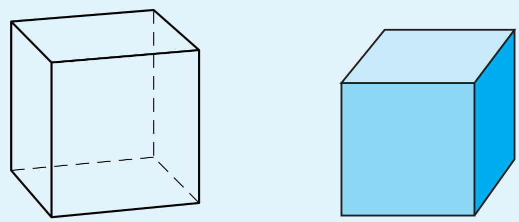
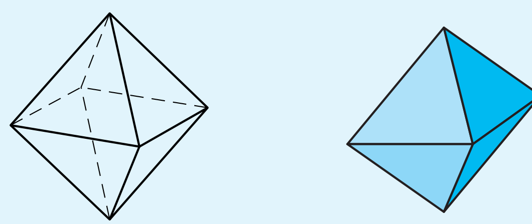
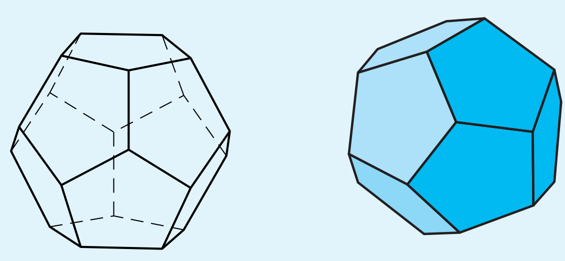
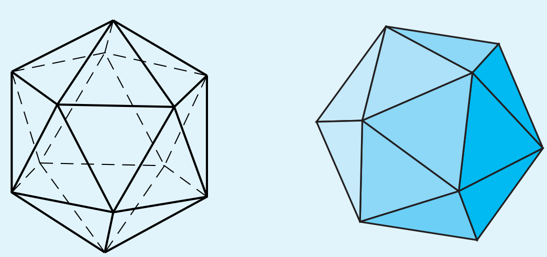
Gömb és részei

Gömb: $A = 4\pi R^2 = \pi d^2,$ $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{\pi}{6}d^3.$	
Gömböv, -réteg: $A = 2\pi Rm,$ $V = \frac{\pi m}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + m^2).$	
Gömbsüveg, -szelet: $A = 2\pi Rm + \pi r^2,$ $V = \frac{\pi}{3}m^2(3R - m).$	
Gömbcikk: $A = \pi R(2m + r),$ $V = \frac{2\pi}{3}R^2 m.$	

Ellipszoid

Ellipszoid: $V = \frac{4\pi}{3}abc$, ahol a, b, c a három féltengely hossza.	

Szabályos testek:

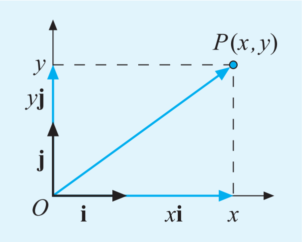
Tetraéder:	
$A = \sqrt{3}a^2$,	
$V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$,	
4 lap; 6 él; 4 csúcs	
Hexaéder:	
$A = 6a^2$,	
$V = a^3$,	
6 lap; 12 él; 8 csúcs	
Oktaéder:	
$A = 2\sqrt{3}a^2$,	
$V = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$,	
8 lap; 12 él; 6 csúcs	
Dodekaéder:	
$A = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2$,	
$V = \dfrac{15 + 7\sqrt{5}}{4}a^3$,	
12 lap; 30 él; 20 csúcs	
Ikozaéder:	
$A = 5\sqrt{3}a^2$,	
$V = \dfrac{15 + 5\sqrt{5}}{12}a^3$,	
20 lap; 30 él; 12 csúcs	

9. ANALITIKUS GEOMETRIA A SÍKBAN

9.1. Koordináta-rendszerek

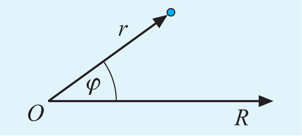
Descartes-féle derékszögű koordináták:

$$P = P(x, y); \qquad \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$



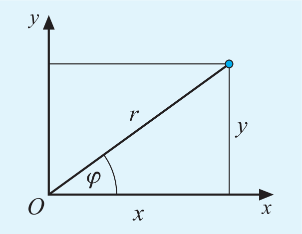
Polárkoordináták:

$$P = P(r, \varphi); \qquad r = |\mathbf{r}| = |\overline{OP}|; \qquad \varphi = (R, \mathbf{r})_{\sphericalangle}.$$



A két koordináta-rendszer kapcsolata:

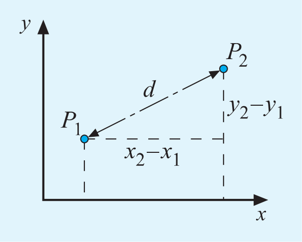
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



9.2. Pont

Két pont távolsága:

$$d = |\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



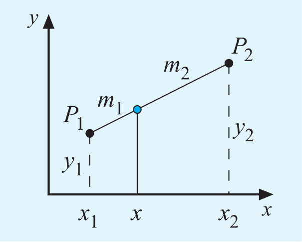
Az $m_1 : m_2$ arányban osztó pont koordinátái:

$$P(x; y) = |\overline{P_1 P}| : |\overline{P P_2}| = m_1 : m_2,$$

$$x = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}, \qquad y = \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}.$$

A felezőpont koordinátái:

$$F(x_f; y_f): \qquad x_f = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_f = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Pontrendszer súlypontja (egyenlő súlyozás esetén):

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \qquad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

A háromszög súlypontjának koordinátái:

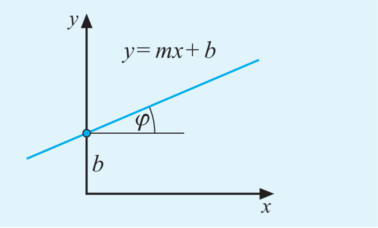
$$S(x_S; y_S): \qquad x_S = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y_S = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

9.3. Egyenes

Descartes-féle normálalak (iránytényezős egyenlet):

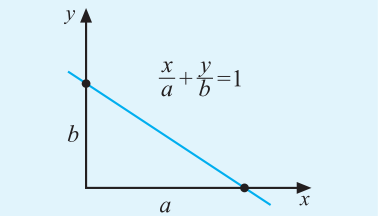
$y = mx + b; \qquad m = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \text{ha } 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$

$x = a, \qquad \text{ha } \alpha = 90^\circ.$



Tengelymetszetes alak:

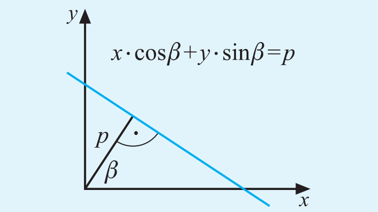
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \cdot b \neq 0.$$



Hesse-féle normálalak:

$x \cdot \cos\beta + y \cdot \sin\beta = p.$

($\mathbf{n}^\circ(\cos\beta, \sin\beta)$ – a normálvektor.)



Általános alak:

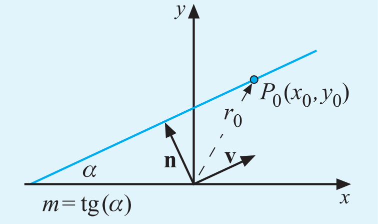
$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0.$

Adott $P_0(x_0, y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenletei:

$\mathbf{v}(v_1, v_2) = (-B, A)$ – az irányvektor;

$\mathbf{n}(A, B)$ – a normálvektor;

$m = \operatorname{tg}\alpha$ – az iránytangens.



Vektoregyenlet: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot t.$

Paraméteres egyenletrendszer: $\begin{cases} x = x_0 + v_1 \cdot t \\ y = y_0 + v_2 \cdot t \end{cases}.$

Irányvektoros egyenlet: $v_2(x - x_0) = v_1(y - y_0).$

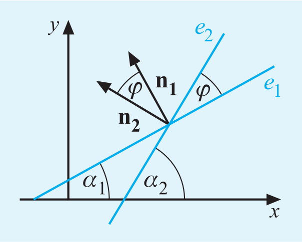
Normálvektoros egyenlet: $Ax + By = Ax_0 + By_0.$

Iránytényezős egyenlet: $y = m(x - x_0) + y_0.$

Normálalak: $\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$

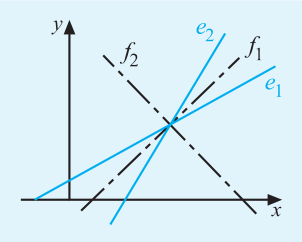
Két ponton ($P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$) átmenő egyenes egyenlete:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$



Két egyenes hajlásszöge:

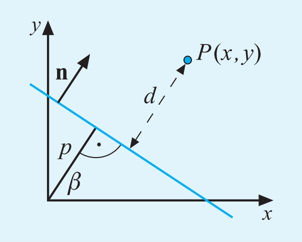
$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|.$$



Két egyenes szögfelezőinek egyenlete:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

$$x(\cos\beta_1 \pm \cos\beta_2) + y(\sin\beta_1 \pm \sin\beta_2) = \beta_1 \pm \beta_2.$$



Pont távolsága egyenestől:

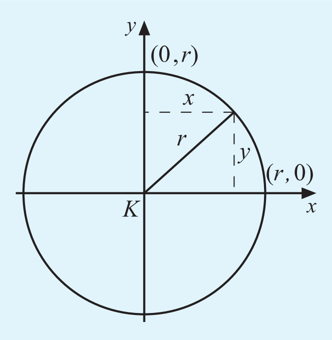
$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{m^2 + 1}} = x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - p.$$

Két egyenes párhuzamos, ha $A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$; $\quad m_1 = m_2$.
Két egyenes merőleges, ha $A_1 \cdot A_2 = -B_1 \cdot B_2$; $\quad m_1 \cdot m_2 = -1$.

9.4. Kör

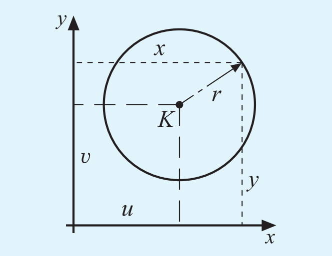
Kanonikus egyenlete, $K(0,0)$:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



A $K(u, v)$ középpontú egyenlet:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$$



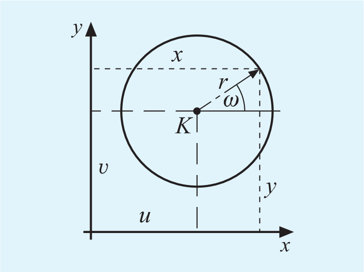
Általános egyenlet ($A > 0$):

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}}, \qquad K\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right).$$

Paraméteres egyenletrendszer, ha $K(u, v)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= u + r \cdot \cos\omega \\ y &= v + r \cdot \sin\omega \end{aligned}\right\}, \qquad 0 \le \omega < 2\pi.$$

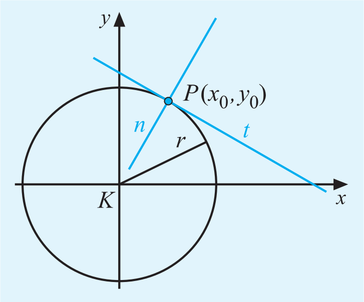


A $P(x_0, y_0)$ pontban az érintő egyenes egyenlete és iránytangense, ha $K(0, 0)$:

$$xx_0 + yy_0 = r^2, \qquad m = -\frac{x_0}{y_0}.$$

A $P(x_0, y_0)$ pontban a normális egyenlete és iránytangense, ha $K(0, 0)$:

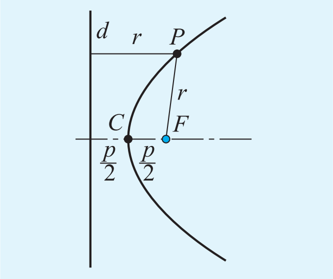
$$x_0 y = y_0 x, \qquad m^* = \frac{y_0}{x_0}.$$



9.5. Parabola

Kanonikus egyenlet, ha $C(0, 0)$, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$:

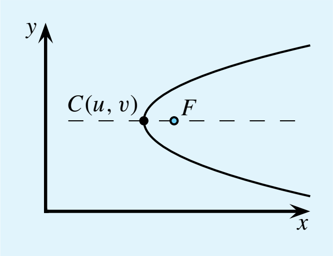
$$y^2 = 2px.$$



Az eltolt, $C(u, v)$ csúcspontú egyenlet,

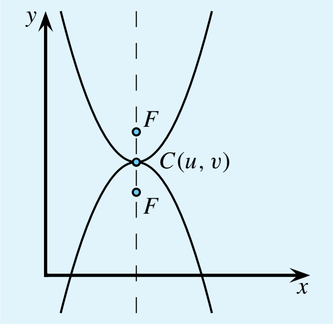
jobbra nyíló: $(y - v)^2 = 2p \cdot (x - u)$;

balra nyíló: $(y - v)^2 = -2p \cdot (x - u)$;



Elforgatott parabola ($\pm 90°$-kal), ha $C(u, v)$, $F\left(u, v, \pm\frac{p}{2}\right)$:

$$(x - u)^2 = 2p \cdot (y - v), \qquad (x - u)^2 = -2p \cdot (y - v).$$



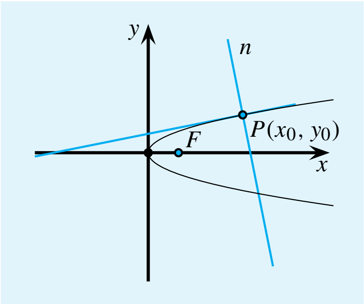
Általános egyenlet:

$$Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$p = -\frac{D}{C}, \qquad K\left(-\frac{E^2 - CF}{2CD}, -\frac{E}{C}\right).$$

A $P(x_0, y_0)$ pontban érintő egyenes egyenlete és iránytangense, ha $C(0, 0)$, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$:

$$y \cdot y_0 = p \cdot (x - x_0), \qquad m = \frac{p}{y_0}.$$



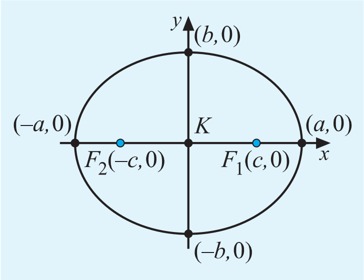
A $P(x_0, y_0)$ pontbeli normális egyenlete és iránytangense, ha $C(0, 0)$, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$:

$$p \cdot (y - y_0) = y_0 \cdot (x - x_0), \qquad m^* = -\frac{y_0}{p_0}.$$

9.6. Ellipszis

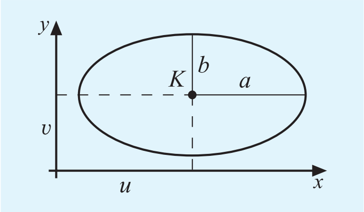
Kanonikus egyenlet, ha $K(0, 0)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



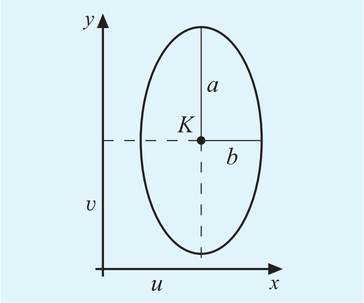
Az eltolt, $K(u, v)$ középpontú egyenlet:

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1.$$



Elforgatott ellipszis (90°-kal), ha
$K(u, v)$, $F_1(u, v - c)$, $F_2(u, v + c)$:

$$\frac{(x-u)^2}{b^2} + \frac{(y-v)^2}{a^2} = 1.$$



Általános egyenlet:

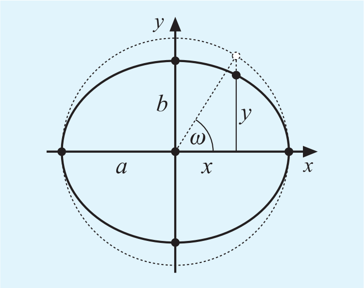
$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$a = \sqrt{\frac{CD^2 + AE^2 - ACF}{A^2C}}, \qquad b = \sqrt{\frac{CD^2 + AE^2 - ACF}{AC^2}},$$

$$K\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C}\right).$$

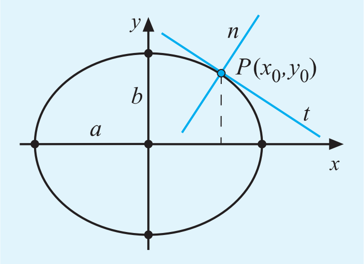
Paraméteres egyenletrendszer, ha
$K(0,0)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \cos\omega \\ y &= b \cdot \sin\omega \end{aligned}\right\}, \qquad 0 \le \omega < 2\pi.$$



A $P(x_0, y_0)$ pontban érintő egyenes egyenlete és iránytangense, ha $K(0,0)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1; \qquad m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$



A $P(x_0, y_0)$ pontbeli normális egyenlete és iránytangense, ha $K(0,0)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$:

$$y - y_0 = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0), \qquad m^* = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}.$$

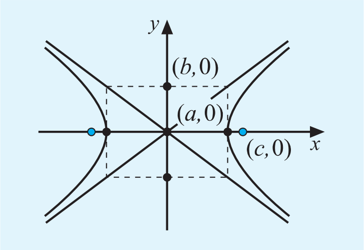
Az ellipszis területe: $\quad T = \pi ab = \dfrac{\pi p^2}{\sqrt{(1-e^2)^3}}.$

Az ellipszis kerülete (közelítések): $\quad K \approx \pi\left[\dfrac{3(a+b)}{2} - \sqrt{ab}\right], \qquad K \approx 4\dfrac{ab\pi + (a-b)^2}{a+b}.$

9.7. Hiperbola

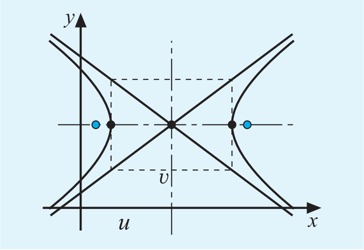
Kanonikus egyenlet, ha $K(0,0)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

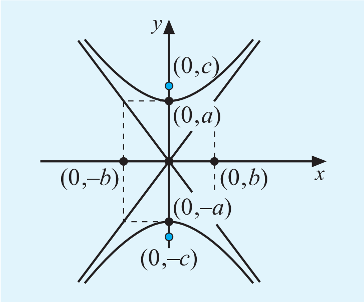


Az eltolt, $K(u, v)$ középpontú egyenlet:

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1.$$



Elforgatott hiperbola (90°-kal), ha
$K(0, 0)$, $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$:



$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Eltolva $K(u, v)$ középpontba:

$$\frac{(x-u)^2}{b^2} - \frac{(y-v)^2}{a^2} = 1.$$

Általános egyenlet:

$$Ax^2 - Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

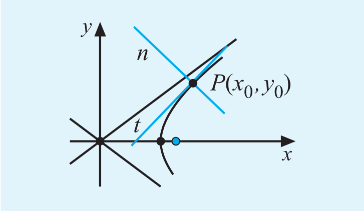
$$a = \sqrt{\frac{CD^2 - AE^2 - ACF}{A^2C}}, \qquad b = \sqrt{\frac{CD^2 - AE^2 - ACF}{AC^2}},$$

$$K\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{C}\right).$$

A $P(x_0, y_0)$ pontban érintő egyenes egyenlete és iránytangense, ha $K(0, 0)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \qquad m = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

A $P(x_0, y_0)$ pontbeli normális egyenlete és iránytangense, ha $K(0, 0)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$:

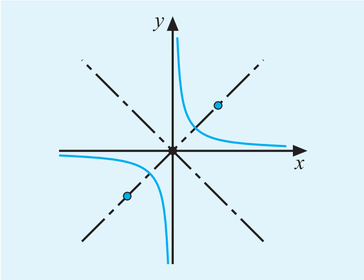


$$y - y_0 = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0), \qquad m^* = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}.$$

Az aszimptoták egyenlete, ha $K(0, 0)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Az egyenlő szárú hiperbola az aszimptoták rendszerében:



$$x \cdot y = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

10.1. Útmutató

A négyjegyű függvénytáblázatokból az egyes függvények értékét általában négy értékes jegy pontosságával határozhatjuk meg. Ez a gyakorlati számítások igényeit legtöbbször kielégíti. Gyakran nincs is szükség ekkora pontosságra, sőt nem is értelmezhető az adott műszaki körülmények között.

A táblázatok egy részében a függvény megfelelő pontosságú értékét közvetlenül kiolvashatjuk, másoknál a táblabeli értékekből *interpolálással* kaphatjuk meg. Ahol erre szükség van, ott a táblázatok szélén megadom a *javítások* megfelelő értékét, amelyeket a táblázatból kinézett függvényérték *utolsó számjegyéhez kell hozzáadni – kivonni*. Ahol nincs segédtáblázat, ott nem kell vagy értelmetlen interpolálni.

A logaritmus és a trigonometrikus függvények *inverzének* helyettesítési értékét a táblázat segítségével *visszakereséssel* (*belülről kifelé keresés*) határozhatjuk meg.

A függvények táblázata csak a változó egy tartományára adja meg a helyettesítési értéket. Ezen a tartományon kívüli értékeket és a táblázatból kikeresett függvényértéket megfelelően transzformálni kell.

Példák:

1. Adott szám négyzetének meghatározása:

$x = 43{,}86$ $\quad N^2 = 4{,}38^2 = 19{,}18$ a táblázat 4,3-as sorának 8-as oszlopából.

$6 \rightarrow +5$ a javítások táblázatának 6-os oszlopából $\quad 4{,}386^2 = 19{,}23$

$x^2 = 19{,}23 \cdot 10^2 = 1923.$

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	1	2	3	4	4	5	6	7	8

2. Adott szám négyzetgyökének meghatározása:

$x = 5{,}247$ $\quad \sqrt{5{,}24} = 2{,}289$ a táblázat *első* részéből $(1{,}00 \leq x \leq< 9{,}99)$

$7 \rightarrow +1$ a javítások táblázatának 7-es oszlopából $\quad \sqrt{5{,}247} = 2{,}290$

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
5,1	2,258	2,261	2,263	2,265	2,267	2,269	2,272	2,274	2,276	2,278	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,2	2,280	2,283	2,285	2,287	2,289	2,291	2,293	2,296	2,298	2,300	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,3	2,302	2,304	2,307	2,309	2,311	2,313	2,315	2,317	2,319	2,322	0	0	1	1	1	1	1	2	2

$x = 52{,}47$ $\quad \sqrt{52{,}4} = 7{,}239$ a táblázat *második* részéből $(10{,}0 \leq x \leq 99{,}9)$

$7 \rightarrow +5$ a javítások táblázatának 7-es oszlopából $\quad \sqrt{52{,}47} = 7{,}244$

$10N$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
51,	7,141	7,148	7,155	7,162	7,169	7,176	7,183	7,190	7,197	7,204	1	1	2	3	3	4	5	6	6
52,	7,211	7,218	7,225	7,232	7,239	7,246	7,253	7,259	7,266	7,273	1	1	2	3	3	4	5	5	6
53,	7,280	7,287	7,294	7,301	7,308	7,314	7,321	7,328	7,335	7,342	1	1	2	3	3	4	5	5	6

3. Adott szám logaritmusának meghatározása:

$x = 438{,}6$ lg N = lg 4,38 = 0,6415 a táblázat 4,3-as sorának 8-as oszlopából.

6 → +6 a javítások táblázatának 6-os oszlopából lg 4,398 = 0,6421 lg 438,6 = 2,6421

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4,2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	0	2	3	4	5	6	7	8	9
4,3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	0	2	3	4	5	6	7	8	9
4,4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	0	2	3	4	5	6	7	8	9

4. Adott szög szinuszának és koszinuszának meghatározása:

$\alpha = 27^\circ\ 46'$ $\sin 27^\circ\ 40' = 0{,}4643$ a táblázat 27°-os sorának 40′-es oszlopából.

6′ → 15 a javítások táblázatának 6-os oszlopából $\sin 27^\circ\ 46' = 0{,}4658$

sin 0°–45°

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
26	4384	4410	4436	4462	4488	4514	4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	4540	4566	4592	4617	4643	4669	4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	4695	4720	4746	4772	4797	4823	4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23

$\alpha = 27^\circ\ 46'$ $\cos 27^\circ\ 40' = 0{,}8857$ a *jobb oldali* 27°-os sor *alsó* 40′-es oszlopából.

6′ → −8 a javítások táblázatának 6-os oszlopából $\cos 27^\circ\ 46' = 0{,}8849$

61	8746	8760	8774	8788	8802	8816	8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11	12
62	8829	8843	8857	8870	8884	8897	8910	27	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	8910	8923	8936	8949	8962	8975	8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10	12
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

cos 0°–45°

5. Adott tangens értékéből a szög meghatározása (visszakeresés):

tg $\alpha = 0{,}2720$ tg $15^\circ 10' \equiv 0{,}2711$ a táblázat 15°-os sorában a 10′-es oszlopban

9 a különbség, ami a javítások 3′-es oszlopában áll. $\alpha = 15^\circ\ 10' + 3' = 15^\circ\ 13'$

tg 0°–30°

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
14	2493	2524	2555	2586	2617	2648	2679	75°	3	6	9	12	16	19	22	25	28
15°	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74	3	6	9	13	16	19	22	25	28
16	2867	2899	2931	2962	2994	3026	3057	73	3	6	9	13	16	19	22	25	28

$x = N \cdot 10^k$ $x^2 = N^2 \cdot 10^{2k}$ **1,00 – 5,49**

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	2	4	6	8	11	13	15	17	19
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	2	5	7	9	12	14	16	18	21
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	3	5	8	10	13	15	18	20	23
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	3	5	8	11	14	16	19	22	24
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528	3	6	9	12	16	19	22	25	28
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856	3	7	10	13	17	20	23	26	30
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204	4	7	11	14	18	21	25	28	32
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572	4	7	11	15	19	22	26	30	33
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960	4	8	12	16	20	23	27	31	35
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368	4	8	12	16	21	25	29	33	37
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796	4	9	13	17	22	26	30	34	39
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244	4	9	14	18	22	27	31	36	40
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712	5	9	14	19	24	28	33	38	42
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200	5	10	15	20	25	29	34	39	44
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708	5	10	15	20	26	31	36	41	46
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236	5	11	16	21	27	32	37	42	48
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784	5	11	16	22	27	33	38	44	49
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352	6	11	17	23	29	34	40	46	51
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940	6	12	18	24	30	35	41	47	53
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548	6	12	18	24	31	37	43	49	55
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,049	10,112	10,176	6	13	19	25	32	38	44	50	57
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18	1	1	2	3	3	4	5	6	6
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62	1	1	2	3	4	4	5	6	7
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36	1	2	2	3	4	4	5	6	7
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56	1	2	2	3	4	5	6	7	7
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05	1	2	3	4	5	6	7	9	10
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14	1	2	3	4	5	7	8	9	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

10.2. Számok négyzete/2

$x = N \cdot 10^k$ $x^2 = N^2 \cdot 10^{2k}$ **5,50 – 9,99**

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69	1	2	4	5	6	7	8	9	11
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88	1	2	4	5	6	7	8	10	11
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09	1	2	4	5	6	7	8	10	11
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12	1	3	4	5	6	8	9	10	12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43	1	3	4	5	7	8	9	10	12
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47	1	3	4	5	7	8	10	11	12
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70	1	3	4	6	7	9	10	11	13
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08	2	3	5	7	8	10	11	13	15
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08	2	3	5	7	8	10	12	14	15
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79	2	3	5	7	9	10	12	14	15
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52	2	3	5	7	9	10	12	14	16
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46	2	4	5	7	9	11	13	15	16
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06	2	4	6	8	9	11	13	15	17
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97	2	4	6	8	10	11	13	15	17
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90	2	4	6	8	10	12	14	15	17
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80	2	4	6	8	10	12	14	16	18
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

$x = N \cdot 10^{2k}$ $\sqrt{x} = \sqrt{N} \cdot 10^{k}$ **1,00 – 5,49**

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1,0	1,000	1,005	1,010	1,015	1,020	1,025	1,030	1,034	1,039	1,044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,1	1,049	1,054	1,058	1,063	1,068	1,072	1,077	1,082	1,086	1,091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,2	1,095	1,100	1,105	1,109	1,114	1,118	1,122	1,127	1,131	1,136	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,3	1,140	1,145	1,149	1,153	1,158	1,162	1,166	1,170	1,175	1,179	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,4	1,183	1,187	1,192	1,196	1,200	1,204	1,208	1,212	1,217	1,221	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,5	1,225	1,229	1,233	1,237	1,241	1,245	1,249	1,253	1,257	1,261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,6	1,265	1,269	1,273	1,277	1,281	1,285	1,288	1,292	1,296	1,300	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,7	1,304	1,308	1,311	1,315	1,319	1,323	1,327	1,330	1,334	1,338	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,8	1,342	1,345	1,349	1,353	1,356	1,360	1,364	1,367	1,371	1,375	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,9	1,378	1,382	1,386	1,389	1,393	1,396	1,400	1,404	1,407	1,411	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,0	1,414	1,418	1,421	1,425	1,428	1,432	1,435	1,439	1,442	1,446	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,1	1,449	1,453	1,456	1,459	1,463	1,466	1,470	1,473	1,476	1,480	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,2	1,483	1,487	1,490	1,493	1,497	1,500	1,503	1,507	1,510	1,513	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,3	1,517	1,520	1,523	1,526	1,530	1,533	1,536	1,539	1,543	1,546	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,4	1,549	1,552	1,556	1,559	1,562	1,565	1,568	1,572	1,575	1,578	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,5	1,581	1,584	1,587	1,591	1,594	1,597	1,600	1,603	1,606	1,609	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2,6	1,612	1,616	1,619	1,622	1,625	1,628	1,631	1,634	1,637	1,640	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2,7	1,643	1,646	1,649	1,652	1,655	1,658	1,661	1,664	1,667	1,670	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2,8	1,673	1,676	1,679	1,682	1,685	1,688	1,691	1,694	1,697	1,700	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2,9	1,703	1,706	1,709	1,712	1,715	1,718	1,720	1,723	1,726	1,729	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,0	1,732	1,735	1,738	1,741	1,744	1,746	1,749	1,752	1,755	1,758	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,1	1,761	1,764	1,766	1,769	1,772	1,775	1,778	1,780	1,783	1,786	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,2	1,789	1,792	1,794	1,797	1,800	1,803	1,806	1,808	1,811	1,814	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,3	1,817	1,819	1,822	1,825	1,828	1,830	1,833	1,836	1,838	1,841	0	0	1	1	1	2	2	2	2
3,4	1,844	1,847	1,849	1,852	1,855	1,857	1,860	1,863	1,865	1,868	0	0	1	1	1	2	2	2	2
3,5	1,871	1,873	1,876	1,879	1,881	1,884	1,887	1,889	1,892	1,895	0	0	1	1	1	2	2	2	2
3,6	1,897	1,900	1,903	1,905	1,908	1,910	1,913	1,916	1,918	1,921	0	0	1	1	1	2	2	2	2
3,7	1,924	1,926	1,929	1,931	1,934	1,936	1,939	1,942	1,944	1,947	0	0	1	1	1	1	2	2	2
3,8	1,949	1,952	1,954	1,957	1,960	1,962	1,965	1,967	1,970	1,972	0	0	1	1	1	1	2	2	2
3,9	1,975	1,977	1,980	1,982	1,985	1,987	1,990	1,992	1,995	1,997	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,0	2,000	2,002	2,005	2,007	2,010	2,012	2,015	2,017	2,020	2,022	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,1	2,025	2,027	2,030	2,032	2,035	2,037	2,040	2,042	2,045	2,047	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,2	2,049	2,052	2,054	2,057	2,059	2,062	2,064	2,066	2,069	2,071	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,3	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,086	2,088	2,090	2,093	2,095	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,4	2,098	2,100	2,102	2,105	2,107	2,110	2,112	2,114	2,117	2,119	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,5	2,121	2,124	2,126	2,128	2,131	2,133	2,135	2,138	2,140	2,142	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,6	2,145	2,147	2,149	2,152	2,154	2,156	2,159	2,161	2,163	2,166	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,7	2,168	2,170	2,173	2,175	2,177	2,179	2,182	2,184	2,186	2,189	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,8	2,191	2,193	2,195	2,198	2,200	2,202	2,205	2,207	2,209	2,211	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,9	2,214	2,216	2,218	2,220	2,223	2,225	2,227	2,229	2,232	2,234	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,0	2,236	2,238	2,241	2,243	2,245	2,247	2,249	2,252	2,254	2,256	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,1	2,258	2,261	2,263	2,265	2,267	2,269	2,272	2,274	2,276	2,278	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,2	2,280	2,283	2,285	2,287	2,289	2,291	2,293	2,296	2,298	2,300	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,3	2,302	2,304	2,307	2,309	2,311	2,313	2,315	2,317	2,319	2,322	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,4	2,324	2,326	2,328	2,330	2,332	2,335	2,337	2,339	2,341	2,343	0	0	1	1	1	1	1	2	2
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

10.3. Számok négyzetgyöke/2

$x = N \cdot 10^{2k}$ $\sqrt{x} = \sqrt{N} \cdot 10^{k}$ **5,50 – 9,99**

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
5,5	2,345	2,347	2,349	2,352	2,354	2,356	2,358	2,360	2,362	2,364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,6	2,366	2,369	2,371	2,373	2,375	2,377	2,379	2,381	2,383	2,385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,7	2,387	2,390	2,392	2,394	2,396	2,398	2,400	2,402	2,404	2,406	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,8	2,408	2,410	2,412	2,415	2,417	2,419	2,421	2,423	2,425	2,427	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,9	2,429	2,431	2,433	2,435	2,437	2,439	2,441	2,443	2,445	2,447	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,0	2,449	2,452	2,454	2,456	2,458	2,460	2,462	2,464	2,466	2,468	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,1	2,470	2,472	2,474	2,476	2,478	2,480	2,482	2,484	2,486	2,488	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,2	2,490	2,492	2,494	2,496	2,498	2,500	2,502	2,504	2,506	2,508	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,3	2,510	2,512	2,514	2,516	2,518	2,520	2,522	2,524	2,526	2,528	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,4	2,530	2,532	2,534	2,536	2,538	2,540	2,542	2,544	2,546	2,548	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,5	2,550	2,551	2,553	2,555	2,557	2,559	2,561	2,563	2,565	2,567	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,6	2,569	2,571	2,573	2,575	2,577	2,579	2,581	2,583	2,585	2,587	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,7	2,588	2,590	2,592	2,594	2,596	2,598	2,600	2,602	2,604	2,606	0	0	1	1	1	1	1	1	2
6,8	2,608	2,610	2,612	2,613	2,615	2,617	2,619	2,621	2,623	2,625	0	0	1	1	1	1	1	1	2
6,9	2,627	2,629	2,631	2,632	2,634	2,636	2,638	2,640	2,642	2,644	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,0	2,646	2,648	2,650	2,651	2,653	2,655	2,657	2,659	2,661	2,663	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,1	2,665	2,666	2,668	2,670	2,672	2,674	2,676	2,678	2,680	2,681	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,2	2,683	2,685	2,687	2,689	2,691	2,693	2,694	2,696	2,698	2,700	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,3	2,702	2,704	2,706	2,707	2,709	2,711	2,713	2,715	2,717	2,718	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,4	2,720	2,722	2,724	2,726	2,728	2,729	2,731	2,733	2,735	2,737	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,5	2,739	2,740	2,742	2,744	2,746	2,748	2,750	2,751	2,753	2,755	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,6	2,757	2,759	2,760	2,762	2,764	2,766	2,768	2,769	2,771	2,773	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,7	2,775	2,777	2,778	2,780	2,782	2,784	2,786	2,787	2,789	2,791	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,8	2,793	2,795	2,796	2,798	2,800	2,802	2,804	2,805	2,807	2,809	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,9	2,811	2,812	2,814	2,816	2,818	2,820	2,821	2,823	2,825	2,827	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,0	2,828	2,830	2,832	2,834	2,835	2,837	2,839	2,841	2,843	2,844	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,1	2,846	2,848	2,850	2,851	2,853	2,855	2,857	2,858	2,860	2,862	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,2	2,864	2,865	2,867	2,869	2,871	2,872	2,874	2,876	2,877	2,879	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,3	2,881	2,883	2,884	2,886	2,888	2,890	2,891	2,893	2,895	2,897	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,4	2,898	2,900	2,902	2,903	2,905	2,907	2,909	2,910	2,912	2,914	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,5	2,915	2,917	2,919	2,921	2,922	2,924	2,926	2,927	2,929	2,931	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,6	2,933	2,934	2,936	2,938	2,939	2,941	2,943	2,944	2,946	2,948	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,7	2,950	2,951	2,953	2,955	2,956	2,958	2,960	2,961	2,963	2,965	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,8	2,966	2,968	2,970	2,972	2,973	2,975	2,977	2,978	2,980	2,982	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,9	2,983	2,985	2,987	2,988	2,990	2,992	2,993	2,995	2,997	2,998	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,0	3,000	3,002	3,003	3,005	3,007	3,008	3,010	3,012	3,013	3,015	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,1	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,028	3,030	3,032	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,2	3,033	3,035	3,036	3,038	3,040	3,041	3,043	3,045	3,046	3,048	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,3	3,050	3,051	3,053	3,055	3,056	3,058	3,059	3,061	3,063	3,064	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,4	3,066	3,068	3,069	3,071	3,072	3,074	3,076	3,077	3,079	3,081	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,5	3,082	3,084	3,085	3,087	3,089	3,090	3,092	3,094	3,095	3,097	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,6	3,098	3,100	3,102	3,103	3,105	3,106	3,108	3,110	3,111	3,113	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,7	3,114	3,116	3,118	3,119	3,121	3,122	3,124	3,126	3,127	3,129	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,8	3,130	3,132	3,134	3,135	3,137	3,138	3,140	3,142	3,143	3,145	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,9	3,146	3,148	3,150	3,151	3,153	3,154	3,156	3,158	3,159	3,161	0	0	0	1	1	1	1	1	1
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

10.3. Számok négyzetgyöke/3

$x = N \cdot 10^{2k+1}$ $\sqrt{x} = \sqrt{10N} \cdot 10^k$ **10,0 – 54,9**

10*N*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10,	3,162	3,178	3,194	3,209	3,225	3,240	3,256	3,271	3,286	3,302	1	3	5	6	8	9	11	12	14
11,	3,317	3,332	3,347	3,362	3,376	3,391	3,406	3,421	3,435	3,450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12,	3,464	3,479	3,493	3,507	3,521	3,536	3,550	3,564	3,578	3,592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13,	3,606	3,619	3,633	3,647	3,661	3,674	3,688	3,701	3,715	3,728	1	3	4	5	7	8	9	11	12
14,	3,742	3,755	3,768	3,782	3,795	3,808	3,821	3,834	3,847	3,860	1	3	4	5	7	8	9	10	12
15,	3,873	3,886	3,899	3,912	3,924	3,937	3,950	3,962	3,975	3,987	1	2	4	5	6	8	9	10	11
16,	4,000	4,012	4,025	4,037	4,050	4,062	4,074	4,087	4,099	4,111	1	2	4	5	6	7	9	10	11
17,	4,123	4,135	4,147	4,159	4,171	4,183	4,195	4,207	4,219	4,231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18,	4,243	4,254	4,266	4,278	4,290	4,301	4,313	4,324	4,336	4,347	1	2	3	5	6	7	8	9	10
19,	4,359	4,370	4,382	4,393	4,405	4,416	4,427	4,438	4,450	4,461	1	2	3	4	6	7	8	9	10
20,	4,472	4,483	4,494	4,506	4,517	4,528	4,539	4,550	4,561	4,572	1	2	3	4	5	7	8	9	10
21,	4,583	4,593	4,604	4,615	4,626	4,637	4,648	4,658	4,669	4,680	1	2	3	4	5	6	7	9	10
22,	4,690	4,701	4,712	4,722	4,733	4,743	4,754	4,764	4,775	4,785	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23,	4,796	4,806	4,817	4,827	4,837	4,848	4,858	4,868	4,879	4,889	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24,	4,899	4,909	4,919	4,930	4,940	4,950	4,960	4,970	4,980	4,990	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25,	5,000	5,010	5,020	5,030	5,040	5,050	5,060	5,070	5,079	5,089	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26,	5,099	5,109	5,119	5,128	5,138	5,148	5,158	5,167	5,177	5,187	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27,	5,196	5,206	5,215	5,225	5,235	5,244	5,254	5,263	5,273	5,282	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28,	5,292	5,301	5,310	5,320	5,329	5,339	5,348	5,357	5,367	5,376	1	2	3	4	5	6	7	7	8
29,	5,385	5,394	5,404	5,413	5,422	5,431	5,441	5,450	5,459	5,468	1	2	3	4	5	5	6	7	8
30,	5,477	5,486	5,495	5,505	5,514	5,523	5,532	5,541	5,550	5,559	1	2	3	4	4	5	6	7	8
31,	5,568	5,577	5,586	5,595	5,604	5,612	5,621	5,630	5,639	5,648	1	2	3	4	4	5	6	7	8
32,	5,657	5,666	5,675	5,683	5,692	5,701	5,710	5,718	5,727	5,736	1	2	3	3	4	5	6	7	8
33,	5,745	5,753	5,762	5,771	5,779	5,788	5,797	5,805	5,814	5,822	1	2	3	3	4	5	6	7	8
34,	5,831	5,840	5,848	5,857	5,865	5,874	5,882	5,891	5,899	5,908	1	2	3	3	4	5	6	7	8
35,	5,916	5,925	5,933	5,941	5,950	5,958	5,967	5,975	5,983	5,992	1	2	2	3	4	5	6	7	8
36,	6,000	6,008	6,017	6,025	6,033	6,042	6,050	6,058	6,066	6,075	1	2	2	3	4	5	6	7	7
37,	6,083	6,091	6,099	6,107	6,116	6,124	6,132	6,140	6,148	6,156	1	2	2	3	4	5	6	6	7
38,	6,164	6,173	6,181	6,189	6,197	6,205	6,213	6,221	6,229	6,237	1	2	2	3	4	5	6	6	7
39,	6,245	6,253	6,261	6,269	6,277	6,285	6,293	6,301	6,309	6,317	1	2	2	3	4	5	6	6	7
40,	6,325	6,332	6,340	6,348	6,356	6,364	6,372	6,380	6,387	6,395	1	2	2	3	4	5	5	6	7
41,	6,403	6,411	6,419	6,427	6,434	6,442	6,450	6,458	6,465	6,473	1	2	2	3	4	5	5	6	7
42,	6,481	6,488	6,496	6,504	6,512	6,519	6,527	6,535	6,542	6,550	1	1	2	3	4	5	5	6	7
43,	6,557	6,565	6,573	6,580	6,588	6,595	6,603	6,611	6,618	6,626	1	1	2	3	4	4	5	6	7
44,	6,633	6,641	6,648	6,656	6,663	6,671	6,678	6,686	6,693	6,701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
45,	6,708	6,716	6,723	6,731	6,738	6,745	6,753	6,760	6,768	6,775	1	1	2	3	4	4	5	6	7
46,	6,782	6,790	6,797	6,804	6,812	6,819	6,826	6,834	6,841	6,848	1	1	2	3	4	4	5	6	7
47,	6,856	6,863	6,870	6,877	6,885	6,892	6,899	6,907	6,914	6,921	1	1	2	3	4	4	5	6	6
48,	6,928	6,935	6,943	6,950	6,957	6,964	6,971	6,979	6,986	6,993	1	1	2	3	4	4	5	6	6
49,	7,000	7,007	7,014	7,021	7,029	7,036	7,043	7,050	7,057	7,064	1	1	2	3	4	4	5	6	6
50,	7,071	7,078	7,085	7,092	7,099	7,106	7,113	7,120	7,127	7,134	1	1	2	3	3	4	5	6	6
51,	7,141	7,148	7,155	7,162	7,169	7,176	7,183	7,190	7,197	7,204	1	1	2	3	3	4	5	6	6
52,	7,211	7,218	7,225	7,232	7,239	7,246	7,253	7,259	7,266	7,273	1	1	2	3	3	4	5	5	6
53,	7,280	7,287	7,294	7,301	7,308	7,314	7,321	7,328	7,335	7,342	1	1	2	3	3	4	5	5	6
54,	7,348	7,355	7,362	7,369	7,376	7,382	7,389	7,396	7,403	7,409	1	1	2	3	3	4	5	5	6
10*N*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

$x = N \cdot 10^{2k+1}$ $\sqrt{x} = \sqrt{10N} \cdot 10^k$ **55,0 – 99,9**

10N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
55,	7,416	7,423	7,430	7,436	7,443	7,450	7,457	7,463	7,470	7,477	1	1	2	3	3	4	5	5	6
56,	7,483	7,490	7,497	7,503	7,510	7,517	7,523	7,530	7,537	7,543	1	1	2	3	3	4	5	5	6
57,	7,550	7,556	7,563	7,570	7,576	7,583	7,589	7,596	7,603	7,609	1	1	2	3	3	4	5	5	6
58,	7,616	7,622	7,629	7,635	7,642	7,649	7,655	7,662	7,668	7,675	1	1	2	3	3	4	5	5	6
59,	7,681	7,688	7,694	7,701	7,707	7,714	7,720	7,727	7,733	7,740	1	1	2	3	3	4	4	5	6
60,	7,746	7,752	7,759	7,765	7,772	7,778	7,785	7,791	7,797	7,804	1	1	2	3	3	4	4	5	6
61,	7,810	7,817	7,823	7,829	7,836	7,842	7,849	7,855	7,861	7,868	1	1	2	3	3	4	4	5	6
62,	7,874	7,880	7,887	7,893	7,899	7,906	7,912	7,918	7,925	7,931	1	1	2	2	3	4	4	5	6
63,	7,937	7,944	7,950	7,956	7,962	7,969	7,975	7,981	7,987	7,994	1	1	2	2	3	4	4	5	6
64,	8,000	8,006	8,012	8,019	8,025	8,031	8,037	8,044	8,050	8,056	1	1	2	2	3	4	4	5	6
65,	8,062	8,068	8,075	8,081	8,087	8,093	8,099	8,106	8,112	8,118	1	1	2	2	3	4	4	5	6
66,	8,124	8,130	8,136	8,142	8,149	8,155	8,161	8,167	8,173	8,179	1	1	2	2	3	4	4	5	5
67,	8,185	8,191	8,198	8,204	8,210	8,216	8,222	8,228	8,234	8,240	1	1	2	2	3	4	4	5	5
68,	8,246	8,252	8,258	8,264	8,270	8,276	8,283	8,289	8,295	8,301	1	1	2	2	3	4	4	5	5
69,	8,307	8,313	8,319	8,325	8,331	8,337	8,343	8,349	8,355	8,361	1	1	2	2	3	4	4	5	5
70,	8,367	8,373	8,379	8,385	8,390	8,396	8,402	8,408	8,414	8,420	1	1	2	2	3	4	4	5	5
71,	8,426	8,432	8,438	8,444	8,450	8,456	8,462	8,468	8,473	8,479	1	1	2	2	3	3	4	5	5
72,	8,485	8,491	8,497	8,503	8,509	8,515	8,521	8,526	8,532	8,538	1	1	2	2	3	3	4	5	5
73,	8,544	8,550	8,556	8,562	8,567	8,573	8,579	8,585	8,591	8,597	1	1	2	2	3	3	4	5	5
74,	8,602	8,608	8,614	8,620	8,626	8,631	8,637	8,643	8,649	8,654	1	1	2	2	3	3	4	5	5
75,	8,660	8,666	8,672	8,678	8,683	8,689	8,695	8,701	8,706	8,712	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76,	8,718	8,724	8,729	8,735	8,741	8,746	8,752	8,758	8,764	8,769	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77,	8,775	8,781	8,786	8,792	8,798	8,803	8,809	8,815	8,820	8,826	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78,	8,832	8,837	8,843	8,849	8,854	8,860	8,866	8,871	8,877	8,883	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79,	8,888	8,894	8,899	8,905	8,911	8,916	8,922	8,927	8,933	8,939	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80,	8,944	8,950	8,955	8,961	8,967	8,972	8,978	8,983	8,989	8,994	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81,	9,000	9,006	9,011	9,017	9,022	9,028	9,033	9,039	9,044	9,050	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82,	9,055	9,061	9,066	9,072	9,077	9,083	9,088	9,094	9,099	9,105	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83,	9,110	9,116	9,121	9,127	9,132	9,138	9,143	9,149	9,154	9,160	0	1	2	2	3	3	4	4	5
84,	9,165	9,171	9,176	9,182	9,187	9,192	9,198	9,203	9,209	9,214	0	1	2	2	3	3	4	4	5
85,	9,220	9,225	9,230	9,236	9,241	9,247	9,252	9,257	9,263	9,268	0	1	2	2	3	3	4	4	5
86,	9,274	9,279	9,284	9,290	9,295	9,301	9,306	9,311	9,317	9,322	0	1	2	2	3	3	4	4	5
87,	9,327	9,333	9,338	9,343	9,349	9,354	9,359	9,365	9,370	9,375	0	1	2	2	3	3	4	4	5
88,	9,381	9,386	9,391	9,397	9,402	9,407	9,413	9,418	9,423	9,429	0	1	2	2	3	3	4	4	5
89,	9,434	9,439	9,445	9,450	9,455	9,460	9,466	9,471	9,476	9,482	0	1	2	2	3	3	4	4	5
90,	9,487	9,492	9,497	9,503	9,508	9,513	9,518	9,524	9,529	9,534	0	1	2	2	3	3	4	4	5
91,	9,539	9,545	9,550	9,555	9,560	9,566	9,571	9,576	9,581	9,586	0	1	2	2	3	3	4	4	5
92,	9,592	9,597	9,602	9,607	9,612	9,618	9,623	9,628	9,633	9,638	0	1	2	2	3	3	4	4	5
93,	9,644	9,649	9,654	9,659	9,664	9,670	9,675	9,680	9,685	9,690	0	1	2	2	3	3	4	4	5
94,	9,695	9,701	9,706	9,711	9,716	9,721	9,726	9,731	9,737	9,742	0	1	1	2	3	3	4	4	5
95,	9,747	9,752	9,757	9,762	9,767	9,772	9,778	9,783	9,788	9,793	0	1	1	2	3	3	4	4	5
96,	9,798	9,803	9,808	9,813	9,818	9,823	9,829	9,834	9,839	9,844	0	1	1	2	2	3	4	4	5
97,	9,849	9,854	9,859	9,864	9,869	9,874	9,879	9,884	9,889	9,894	0	1	1	2	2	3	3	4	5
98,	9,899	9,905	9,910	9,915	9,920	9,925	9,930	9,935	9,940	9,945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99,	9,950	9,955	9,960	9,965	9,970	9,975	9,980	9,985	9,990	9,995	0	1	1	2	2	3	3	4	4
10N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

10.4. Számok 10 alapú logaritmusa/1

$x = N \cdot 10^k$ $\lg x = \lg N + k$ **1,000 – 1,499**

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1,00	0,0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
1,01	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
1,02	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
1,03	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
1,04	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
1,05	0,0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
1,06	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
1,07	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
1,08	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
1,09	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
1,10	0,0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449
1,11	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488
1,12	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527
1,13	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565
1,14	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603
1,15	0,0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641
1,16	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678
1,17	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715
1,18	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752
1,19	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788
1,20	0,0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824
1,21	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860
1,22	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896
1,23	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931
1,24	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966
1,25	0,0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000
1,26	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035
1,27	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069
1,28	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103
1,29	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136
1,30	0,1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169
1,31	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202
1,32	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235
1,33	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268
1,34	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300
1,35	0,1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332
1,36	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364
1,37	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396
1,38	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427
1,39	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458
1,40	0,1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489
1,41	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520
1,42	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550
1,43	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581
1,44	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611
1,45	0,1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641
1,46	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670
1,47	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700
1,48	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729
1,49	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

10.4. *Számok 10 alapú logaritmusa/2*

$x = N \cdot 10^k$ $\lg x = \lg N + k$ **1,500 – 1,999**

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,50	0,1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787
1,51	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816
1,52	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844
1,53	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872
1,54	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901
1,55	0,1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928
1,56	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956
1,57	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984
1,58	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011
1,59	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038
1,60	0,2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066
1,61	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092
1,62	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119
1,63	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146
1,64	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172
1,65	0,2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198
1,66	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225
1,67	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251
1,68	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276
1,69	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302
1,70	0,2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327
1,71	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353
1,72	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378
1,73	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403
1,74	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428
1,75	0,2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453
1,76	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477
1,77	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502
1,78	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526
1,79	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550
1,80	0,2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574
1,81	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598
1,82	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622
1,83	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646
1,84	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669
1,85	0,2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693
1,86	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716
1,87	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739
1,88	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762
1,89	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785
1,90	0,2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808
1,91	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831
1,92	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853
1,93	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876
1,94	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898
1,95	0,2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920
1,96	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942
1,97	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964
1,98	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986
1,99	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

10.4. Számok 10 alapú logaritmusa/3

$x = N \cdot 10^k$ $\lg x = \lg N + k$ **2,00 – 5,99**

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2,0	0,3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	0	4	6	8	11	13	15	17	19
2,1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	0	4	6	8	10	12	14	16	18
2,2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	0	4	6	8	10	12	14	15	17
2,3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	0	4	6	7	9	11	13	15	17
2,4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	0	4	5	7	9	11	12	14	16
2,5	0,3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	0	3	5	7	9	10	12	14	15
2,6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	0	3	5	7	8	10	11	13	15
2,7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	0	3	5	6	8	9	11	13	14
2,8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	0	3	5	6	8	9	11	12	14
2,9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	0	3	4	6	7	9	10	12	13
3,0	0,4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	0	3	4	6	7	9	10	11	13
3,1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	0	3	4	6	7	8	10	11	12
3,2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	0	3	4	5	7	8	9	11	12
3,3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	0	3	4	5	6	8	9	10	12
3,4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	0	3	4	5	6	8	9	10	11
3,5	0,5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	0	2	4	5	6	7	9	10	11
3,6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	0	2	4	5	6	7	8	10	11
3,7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	0	2	3	5	6	7	8	9	10
3,8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	0	2	3	5	6	7	8	9	10
3,9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	0	2	3	4	6	7	8	9	10
4,0	0,6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	0	2	3	4	5	6	8	9	10
4,1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	0	2	3	4	5	6	7	8	9
4,2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	0	2	3	4	5	6	7	8	9
4,3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	0	2	3	4	5	6	7	8	9
4,4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	0	2	3	4	5	6	7	8	9
4,5	0,6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	0	2	3	4	5	6	7	8	9
4,6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	0	2	3	4	5	6	7	7	8
4,7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	0	2	3	4	5	5	6	7	8
4,8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	0	2	3	4	4	5	6	7	8
4,9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	0	2	3	4	4	5	6	7	8
5,0	0,6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	0	2	3	3	4	5	6	7	8
5,1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	0	2	3	3	4	5	6	7	8
5,2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	0	2	2	3	4	5	6	7	7
5,3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	0	2	2	3	4	5	6	7	7
5,4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	0	2	2	3	4	5	6	6	7
5,5	0,7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	0	2	2	3	4	5	5	6	7
5,6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	0	2	2	3	4	5	5	6	7
5,7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	0	2	2	3	4	5	5	6	7
5,8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	0	1	2	3	4	4	5	6	7
5,9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	0	1	2	3	4	4	5	6	7
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

10.4. Számok 10 alapú logaritmusa/4

$x = N \cdot 10^k$ $\lg x = \lg N + k$ **6,00 – 9,99**

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
6,0	0,7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	0	1	2	3	4	4	5	6	6
6,1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	0	1	2	3	4	4	5	6	6
6,2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	0	1	2	3	3	4	5	6	6
6,3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	0	1	2	3	3	4	5	5	6
6,4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	0	1	2	3	3	4	5	5	6
6,5	0,8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	0	1	2	3	3	4	5	5	6
6,6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	0	1	2	3	3	4	5	5	6
6,7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	0	1	2	3	3	4	5	5	6
6,8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	0	1	2	3	3	4	4	5	6
6,9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	0	1	2	3	3	4	4	5	6
7,0	0,8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	0	1	2	2	3	4	4	5	6
7,1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	0	1	2	2	3	4	4	5	5
7,2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	0	1	2	2	3	4	4	5	5
7,3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	0	1	2	2	3	4	4	5	5
7,4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	0	1	2	2	3	4	4	5	5
7,5	0,8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	0	1	2	2	3	3	4	5	5
7,6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	0	1	2	2	3	3	4	5	5
7,7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	0	1	2	2	3	3	4	4	5
7,8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	0	1	2	2	3	3	4	4	5
7,9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	0	1	2	2	3	3	4	4	5
8,0	0,9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	0	1	2	2	3	3	4	4	5
8,1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	0	1	2	2	3	3	4	4	5
8,2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	0	1	2	2	3	3	4	4	5
8,3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	0	1	2	2	3	3	4	4	5
8,4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	0	1	2	2	3	3	4	4	5
8,5	0,9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	0	1	2	2	3	3	4	4	5
8,6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	0	1	2	2	3	3	4	4	5
8,7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8,8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8,9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,0	0,9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,5	0,9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9,9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

sin 0°–45°

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0,0000	0029	0058	0087	0116	0145	0175	89	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	0349	0378	0407	0436	0465	0494	0523	87	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	0523	0552	0581	0610	0640	0669	0698	86	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	0698	0727	0756	0785	0814	0843	0872	85°	3	6	9	12	14	17	20	23	26
5°	0,0872	0901	0929	0958	0987	1016	1045	84	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	1045	1074	1103	1132	1161	1190	1219	83	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	1219	1248	1276	1305	1334	1363	1392	82	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	1392	1421	1449	1478	1507	1536	1564	81	3	6	9	12	14	17	20	23	26
9	1564	1593	1622	1650	1679	1708	1736	**80°**	3	6	9	11	14	17	20	23	26
10°	0,1736	1765	1794	1822	1851	1880	1908	79	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	1908	1937	1965	1994	2022	2051	2079	78	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	2079	2108	2136	2164	2193	2221	2250	77	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	2250	2278	2306	2334	2363	2391	2419	76	3	6	8	11	14	17	20	23	25
14	2419	2447	2476	2504	2532	2560	2588	75°	3	6	8	11	14	17	20	23	25
15°	0,2588	2616	2644	2672	2700	2728	2756	74	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2756	2784	2812	2840	2868	2896	2924	73	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	2924	2952	2979	3007	3035	3062	3090	72	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	3090	3118	3145	3173	3201	3228	3256	71	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	3256	3283	3311	3338	3365	3393	3420	**70°**	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20°	0,3420	3448	3475	3502	3529	3557	3584	69	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	3584	3611	3638	3665	3692	3719	3746	68	3	5	8	11	14	16	19	22	24
22	3746	3773	3800	3827	3854	3881	3907	67	3	5	8	11	13	16	19	21	24
23	3907	3934	3961	3987	4014	4041	4067	66	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	4067	4094	4120	4147	4173	4200	4226	65°	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25°	0,4226	4253	4279	4305	4331	4358	4384	64	3	5	8	11	13	16	18	21	24
26	4384	4410	4436	4462	4488	4514	4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	4540	4566	4592	4617	4643	4669	4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	4695	4720	4746	4772	4797	4823	4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	4848	4874	4899	4924	4950	4975	5000	**60°**	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30°	0,5000	5025	5050	5075	5100	5125	5150	59	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	5150	5175	5200	5225	5250	5275	5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	5299	5324	5348	5373	5398	5422	5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	5446	5471	5495	5519	5544	5568	5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	5592	5616	5640	5664	5688	5712	5736	55°	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35°	0,5736	5760	5783	5807	5831	5854	5878	54	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	5878	5901	5925	5948	5972	5995	6018	53	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	6018	6041	6065	6088	6111	6134	6157	52	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	6157	6180	6202	6225	6248	6271	6293	51	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	6293	6316	6338	6361	6383	6406	6428	**50°**	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40°	0,6428	6450	6472	6494	6517	6539	6561	49	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	6561	6583	6604	6626	6648	6670	6691	48	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	6691	6713	6734	6756	6777	6799	6820	47	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	6820	6841	6862	6884	6905	6926	6947	46	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	6947	6967	6988	7009	7030	7050	7071	45°	2	4	6	8	10	12	15	17	19
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

cos 45°–90°

10.5. Szögek szinusza és koszinusza/2

sin 45° – 90°

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0,7071	7092	7112	7133	7153	7173	7193	44	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	7193	7214	7234	7254	7274	7294	7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16	18
47	7314	7333	7353	7373	7392	7412	7431	42	2	4	6	8	10	12	14	16	18
48	7431	7451	7470	7490	7509	7528	7547	41	2	4	6	8	10	12	13	15	17
49	7547	7566	7585	7604	7623	7642	7660	**40°**	2	4	6	8	9	11	13	15	17
50°	0,7660	7679	7698	7716	7735	7753	7771	39	2	4	6	7	9	11	13	15	17
51	7771	7790	7808	7826	7844	7862	7880	38	2	4	5	7	9	11	13	14	16
52	7880	7898	7916	7934	7951	7969	7986	37	2	4	5	7	9	11	12	14	16
53	7986	8004	8021	8039	8056	8073	8090	36	2	3	5	7	9	10	12	14	16
54	8090	8107	8124	8141	8158	8175	8192	35°	2	3	5	7	8	10	12	14	15
55°	0,8192	8208	8225	8241	8258	8274	8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	8290	8307	8323	8339	8355	8371	8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13	14
57	8387	8403	8418	8434	8450	8465	8480	32	2	3	5	6	8	9	11	13	14
58	8480	8496	8511	8526	8542	8557	8572	31	2	3	5	6	8	9	11	12	14
59	8572	8587	8601	8616	8631	8646	8660	**30°**	1	3	4	6	7	9	10	12	13
60°	0,8660	8675	8689	8704	8718	8732	8746	29	1	3	4	6	7	9	10	11	13
61	8746	8760	8774	8788	8802	8816	8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11	12
62	8829	8843	8857	8870	8884	8897	8910	27	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	8910	8923	8936	8949	8962	8975	8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10	12
64	8988	9001	9013	9026	9038	9051	9063	25°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
65°	0,9063	9075	9088	9100	9112	9124	9135	24	1	2	4	5	6	7	8	10	11
66	9135	9147	9159	9171	9182	9194	9205	23	1	2	3	5	6	7	8	9	10
67	9205	9216	9228	9239	9250	9261	9272	22	1	2	3	4	6	7	8	9	10
68	9272	9283	9293	9304	9315	9325	9336	21	1	2	3	4	5	6	7	9	10
69	9336	9346	9356	9367	9377	9387	9397	**20°**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70°	0,9397	9407	9417	9426	9436	9446	9455	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	9455	9465	9474	9483	9492	9502	9511	18	1	2	3	4	5	6	6	7	8
72	9511	9520	9528	9537	9546	9555	9563	17	1	2	3	3	4	5	6	7	8
73	9563	9572	9580	9588	9596	9605	9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
74	9613	9621	9628	9636	9644	9652	9659	15°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
75	0,9659	9667	9674	9681	9689	9696	9703	14	1	1	2	3	4	4	5	6	7
76	9703	9710	9717	9724	9730	9737	9744	13	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	9744	9750	9757	9763	9769	9775	9781	12	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	9781	9787	9793	9799	9805	9811	9816	11	1	1	2	2	3	3	4	5	5
79	9816	9822	9827	9833	9838	9843	9848	**10°**	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80°	0,9848	9853	9858	9863	9868	9872	9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	9903	9907	9911	9914	9918	9922	9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	9925	9929	9932	9936	9939	9942	9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	9945	9948	9951	9954	9957	9959	9962	5°	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85°	0,9962	9964	9967	9969	9971	9974	9976	4	0	0	1	1	1	1	2	2	2
86	9976	9978	9980	9981	9983	9985	9986	3	0	0	1	1	1	1	1	2	2
87	9986	9988	9989	9990	9992	9993	9994	2	0	0	0	1	1	1	1	1	2
88	9994	9995	9996	9997	9997	9998	9998	1									
89	9998	9999	9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	**0°**									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

cos 0° – 45°

10.6. Nevezetes szögek szögfüggvényei

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

10.7. Szögek tangense és kotangense/1

tg 0°–30°

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	0349	0378	0407	0437	0466	0495	0524	87	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	0524	0553	0582	0612	0641	0670	0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	0699	0729	0758	0787	0816	0846	0875	85°	3	6	9	12	15	18	20	23	26
5°	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84	3	6	9	12	15	18	21	23	26
6	1051	1080	1110	1139	1169	1198	1228	83	3	6	9	12	15	18	21	24	27
7	1228	1257	1287	1317	1346	1376	1405	82	3	6	9	12	15	18	21	24	27
8	1405	1435	1465	1495	1524	1554	1584	81	3	6	9	12	15	18	21	24	27
9	1584	1614	1644	1673	1703	1733	1763	**80°**	3	6	9	12	15	18	21	24	27
10°	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79	3	6	9	12	15	18	21	24	27
11	1944	1974	2004	2035	2065	2095	2126	78	3	6	9	12	15	18	21	24	27
12	2126	2156	2186	2217	2247	2278	2309	77	3	6	9	12	15	18	21	24	27
13	2309	2339	2370	2401	2432	2462	2493	76	3	6	9	12	15	18	22	25	28
14	2493	2524	2555	2586	2617	2648	2679	75°	3	6	9	12	16	19	22	25	28
15°	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74	3	6	9	13	16	19	22	25	28
16	2867	2899	2931	2962	2994	3026	3057	73	3	6	9	13	16	19	22	25	28
17	3057	3089	3121	3153	3185	3217	3249	72	3	6	10	13	16	19	22	26	29
18	3249	3281	3314	3346	3378	3411	3443	71	3	6	10	13	16	19	23	26	29
19	3443	3476	3508	3541	3574	3607	3640	**70°**	3	7	10	13	16	20	23	26	29
20°	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69	3	7	10	13	17	20	23	27	30
21	3839	3872	3906	3939	3973	4006	4040	68	3	7	10	13	17	20	24	27	30
22	4040	4074	4108	4142	4176	4210	4245	67	3	7	10	14	17	20	24	27	31
23	4245	4279	4314	4348	4383	4417	4452	66	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24	4452	4487	4522	4557	4592	4628	4663	65°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
25°	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64	4	7	11	14	18	21	25	29	32
26	4877	4913	4950	4986	5022	5059	5095	63	4	7	11	15	18	22	25	29	33
27	5095	5132	5169	5206	5243	5280	5317	62	4	7	11	15	18	22	26	30	33
28	5317	5354	5392	5430	5467	5505	5543	61	4	8	11	15	19	23	26	30	34
29	5543	5581	5619	5658	5696	5735	5774	**60°**	4	8	12	15	19	23	27	31	35
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ctg 60°–90°

tg 30°–75°

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
30°	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59	4	8	12	16	20	24	27	31	35
31	6009	6048	6088	6128	6168	6208	6249	58	4	8	12	16	20	24	28	32	36
32	6249	6289	6330	6371	6412	6453	6494	57	4	8	12	16	20	25	29	33	37
33	6494	6536	6577	6619	6661	6703	6745	56	4	8	13	17	21	25	29	33	38
34	6745	6787	6830	6873	6916	6959	7002	55°	4	9	13	17	21	26	30	34	39
35°	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54	4	9	13	18	22	26	31	35	40
36	7265	7310	7355	7400	7445	7490	7536	53	5	9	14	18	23	27	32	36	41
37	7536	7581	7627	7673	7720	7766	7813	52	5	9	14	18	23	28	32	37	42
38	7813	7860	7907	7954	8002	8050	8098	51	5	9	14	19	24	28	33	38	43
39	8098	8146	8195	8243	8292	8342	8391	**50°**	5	10	15	20	24	29	34	39	44
40°	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49	5	10	15	20	25	30	35	40	45
41	8693	8744	8796	8847	8899	8952	9004	48	5	10	16	21	26	31	36	41	47
42	9004	9057	9110	9163	9217	9271	9325	47	5	11	16	21	27	32	37	43	48
43	9325	9380	9435	9490	9545	9601	9657	46	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	9657	9713	9770	9827	9884	9942	1,0000	45°	6	11	17	23	29	34	40	46	51
45°	1,0000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030	1,036	44	1	1	2	2	3	4	4	5	5
46	036	042	048	054	060	066	072	43	1	1	2	2	3	4	4	5	5
47	072	079	085	091	098	104	111	42	1	1	2	3	3	4	5	5	6
48	111	117	124	130	137	144	150	41	1	1	2	3	3	4	5	5	6
49	150	157	164	171	178	185	192	**40°**	1	1	2	3	4	4	5	6	6
50°	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228	1,235	39	1	1	2	3	4	4	5	6	6
51	235	242	250	257	265	272	280	38	1	2	2	3	4	5	5	6	7
52	280	288	295	303	311	319	327	37	1	2	2	3	4	5	5	6	7
53	327	335	343	351	360	368	376	36	1	2	2	3	4	5	6	7	7
54	376	385	393	402	411	419	428	35°	1	2	3	3	4	5	6	7	8
55°	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473	1,483	34	1	2	3	4	5	5	6	7	8
56	483	492	501	511	520	530	540	33	1	2	3	4	5	6	7	8	9
57	540	550	560	570	580	590	600	32	1	2	3	4	5	6	7	8	9
58	600	611	621	632	643	653	664	31	1	2	3	4	5	6	7	9	10
59	664	675	686	698	709	720	732	**30°**	1	2	3	5	6	7	8	9	10
60°	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792	1,804	29	1	2	4	5	6	7	8	10	11
61	804	816	829	842	855	868	881	28	1	3	4	5	6	8	9	10	12
62	881	894	907	921	935	949	963	27	1	3	4	5	7	8	10	11	12
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035	2,050	26	1	3	4	6	7	9	10	12	13
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128	2,145	25°	2	3	5	6	8	9	11	13	14
65°	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229	2,246	24	2	3	5	7	8	10	12	14	15
66	246	264	282	300	318	337	356	23	2	4	6	7	9	11	13	15	16
67	356	375	394	414	434	455	475	22	2	4	6	8	10	12	14	16	18
68	475	496	517	539	560	583	605	21	2	4	7	9	11	13	15	17	20
69	605	628	651	675	699	723	747	**20°**	2	5	7	9	12	14	17	19	21
70°	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877	2,904	19	3	5	8	10	13	16	18	21	23
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047	3,078	18	3	6	9	12	15	17	20	23	26
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237	3,271	17	3	6	10	13	16	19	23	26	29
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450	3,487	16	4	7	11	14	18	22	25	29	32
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689	3,732	15°	4	8	12	16	20	25	29	33	37
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ctg 15°–60°

tg 75°–82°

	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′	
75°0′	3,732	3,736	3,741	3,745	3,749	3,754	3,758	3,763	3,767	3,772	3,776	50′
10′	3,776	3,780	3,785	3,789	3,794	3,798	3,803	3,807	3,812	3,816	3,821	40′
20′	3,821	3,825	3,830	3,834	3,839	3,844	3,848	3,853	3,857	3,862	3,867	30′
30′	3,867	3,871	3,876	3,881	3,885	3,890	3,895	3,899	3,904	3,909	3,914	20′
40′	3,914	3,918	3,923	3,928	3,933	3,938	3,942	3,947	3,952	3,957	3,962	10′
50′	3,962	3,967	3,971	3,976	3,981	3,986	3,991	3,996	4,001	4,006	4,011	**14°0′**
76°0′	4,011	4,016	4,021	4,026	4,031	4,036	4,041	4,046	4,051	4,056	4,061	50′
10′	4,061	4,066	4,071	4,076	4,082	4,087	4,092	4,097	4,102	4,107	4,113	40′
20′	4,113	4,118	4,123	4,128	4,134	4,139	4,144	4,149	4,155	4,160	4,165	30′
30′	4,165	4,171	4,176	4,181	4,187	4,192	4,198	4,203	4,208	4,214	4,219	20′
40′	4,219	4,225	4,230	4,236	4,241	4,247	4,252	4,258	4,264	4,269	4,275	10′
50′	4,275	4,280	4,286	4,292	4,297	4,303	4,309	4,314	4,320	4,326	4,331	**13°0′**
77°0′	4,331	4,337	4,343	4,349	4,355	4,360	4,366	4,372	4,378	4,384	4,390	50′
10′	4,390	4,396	4,402	4,407	4,413	4,419	4,425	4,431	4,437	4,443	4,449	40′
20′	4,449	4,455	4,462	4,468	4,474	4,480	4,486	4,492	4,498	4,505	4,511	30′
30′	4,511	4,517	4,523	4,529	4,536	4,542	4,548	4,555	4,561	4,567	4,574	20′
40′	4,574	4,580	4,586	4,593	4,599	4,606	4,612	4,619	4,625	4,632	4,638	10′
50′	4,638	4,645	4,651	4,658	4,665	4,671	4,678	4,685	4,691	4,698	4,705	**12°0′**
78°0′	4,705	4,711	4,718	4,725	4,732	4,739	4,745	4,752	4,759	4,766	4,773	50′
10′	4,773	4,780	4,787	4,794	4,801	4,808	4,815	4,822	4,829	4,836	4,843	40′
20′	4,843	4,850	4,857	4,864	4,872	4,879	4,886	4,893	4,901	4,908	4,915	30′
30′	4,915	4,922	4,930	4,937	4,945	4,952	4,959	4,967	4,974	4,982	4,989	20′
40′	4,989	4,997	5,005	5,012	5,020	5,027	5,035	5,043	5,050	5,058	5,066	10′
50′	5,066	5,074	5,081	5,089	5,097	5,105	5,113	5,121	5,129	5,137	5,145	**11°0′**
79°0′	5,145	5,153	5,161	5,169	5,177	5,185	5,193	5,201	5,209	5,217	5,226	50′
10′	5,226	5,234	5,242	5,250	5,259	5,267	5,276	5,284	5,292	5,301	5,309	40′
20′	5,309	5,318	5,326	5,335	5,343	5,352	5,361	5,369	5,378	5,387	5,396	30′
30′	5,396	5,404	5,413	5,422	5,431	5,440	5,449	5,458	5,466	5,475	5,485	20′
40′	5,485	5,494	5,503	5,512	5,521	5,530	5,539	5,549	5,558	5,567	5,576	10′
50′	5,576	5,586	5,595	5,605	5,614	5,623	5,633	5,642	5,652	5,662	5,671	**10°0′**
80°0′	5,671	5,681	5,691	5,700	5,710	5,720	5,730	5,740	5,749	5,759	5,769	50′
10′	5,769	5,779	5,789	5,799	5,810	5,820	5,830	5,840	5,850	5,861	5,871	40′
20′	5,871	5,881	5,892	5,902	5,912	5,923	5,933	5,944	5,954	5,965	5,976	30′
30′	5,976	5,986	5,997	6,008	6,019	6,030	6,041	6,051	6,062	6,073	6,084	20′
40′	6,084	6,096	6,107	6,118	6,129	6,140	6,152	6,163	6,174	6,186	6,197	10′
50′	6,197	6,209	6,220	6,232	6,243	6,255	6,267	6,278	6,290	6,302	6,314	**9°0′**
81°0′	6,314	6,326	6,338	6,350	6,362	6,374	6,386	6,398	6,410	6,423	6,435	50′
10′	6,435	6,447	6,460	6,472	6,485	6,497	6,510	6,522	6,535	6,548	6,561	40′
20′	6,561	6,573	6,586	6,599	6,612	6,625	6,638	6,651	6,665	6,678	6,691	30′
30′	6,691	6,704	6,718	6,731	6,745	6,758	6,772	6,786	6,799	6,813	6,827	20′
40′	6,827	6,841	6,855	6,869	6,883	6,897	6,911	6,925	6,940	6,954	6,968	10′
50′	6,968	6,983	6,997	7,012	7,026	7,041	7,056	7,071	7,085	7,100	7,115	**8°0′**
82°0′	7,115	7,130	7,146	7,161	7,176	7,191	7,207	7,222	7,238	7,253	7,269	50′
10′	7,269	7,284	7,300	7,316	7,332	7,348	7,364	7,380	7,396	7,412	7,429	40′
20′	7,429	7,445	7,462	7,478	7,495	7,511	7,528	7,545	7,562	7,579	7,596	30′
30′	7,596	7,613	7,630	7,647	7,665	7,682	7,700	7,717	7,735	7,753	7,770	20′
40′	7,770	7,788	7,806	7,824	7,842	7,861	7,879	7,897	7,916	7,934	7,953	10′
50′	7,953	7,972	7,991	8,009	8,028	8,048	8,067	8,086	8,105	8,125	8,144	**7°0′**
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	

ctg 8°–15°

10.7. Szögek tangense és kotangense/4

tg 83°–90°

	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′	
83°0′	8, 144	8, 164	8, 184	8, 204	8, 223	8, 243	8, 264	8, 284	8, 304	8, 324	8, 345	50′
10′	8, 345	8, 366	8, 386	8, 407	8, 428	8, 449	8, 470	8, 491	8, 513	8, 534	8, 556	40′
20′	8, 556	8, 577	8, 599	8, 621	8, 643	8, 665	8, 687	8, 709	8, 732	8, 754	8, 777	30′
30′	8, 777	8, 800	8, 823	8, 846	8, 869	8, 892	8, 915	8, 939	8, 962	8, 986	9, 010	10′
40′	9, 010	9, 034	9, 058	9, 082	9, 106	9, 131	9, 156	9, 180	9, 205	9, 230	9, 255	10′
50′	9, 255	9, 281	9, 306	9, 332	9, 357	9, 383	9, 409	9, 435	9, 461	9, 488	9, 514	**6°0′**
84°0′	9, 514	9, 541	9, 568	9, 595	9, 622	9, 649	9, 677	9, 704	9, 732	9, 760	9, 788	50′
10′	9, 788	9, 816	9, 845	9, 873	9, 902	9, 931	9, 960	9, 989	10, 019	10, 048	10, 078	40′
20′	10, 08	10, 11	10, 14	10, 17	10, 20	10, 23	10, 26	10, 29	10, 32	10, 35	10, 39	30′
30′	10, 39	10, 42	10, 45	10, 48	10, 51	10, 55	10, 58	10, 61	10, 64	10, 68	10, 71	20′
40′	10, 71	10, 75	10, 78	10, 81	10, 85	10, 88	10, 92	10, 95	10, 99	11, 02	11, 06	10′
50′	11, 06	11, 10	11, 13	11, 17	11, 20	11, 24	11, 28	11, 32	11, 35	11, 39	11, 43	**5°0′**
85°0′	11, 43	11, 47	11, 51	11, 55	11, 59	11, 62	11, 66	11, 70	11, 74	11, 79	11, 83	50′
10′	11, 83	11, 87	11, 91	11, 95	11, 99	12, 03	12, 08	12, 12	12, 16	12, 21	12, 25	40′
20′	12, 25	12, 29	12, 34	12, 38	12, 43	12, 47	12, 52	12, 57	12, 61	12, 66	12, 71	30′
30′	12, 71	12, 75	12, 80	12, 85	12, 90	12, 95	13, 00	13, 05	13, 10	13, 15	13, 20	20′
40′	13, 20	13, 25	13, 30	13, 35	13, 40	13, 46	13, 51	13, 56	13, 62	13, 67	13, 73	10′
50′	13, 73	13, 78	13, 84	13, 89	13, 95	14, 01	14, 07	14, 12	14, 18	14, 24	14, 30	**4°0′**
86°0′	14, 30	14, 36	14, 42	14, 48	14, 54	14, 61	14, 67	14, 73	14, 80	14, 86	14, 92	50′
10′	14, 92	14, 99	15, 06	15, 12	15, 19	15, 26	15, 33	15, 39	15, 46	15, 53	15, 60	40′
20′	15, 60	15, 68	15, 75	15, 82	15, 89	15, 97	16, 04	16, 12	16, 20	16, 27	16, 35	30′
30′	16, 35	16, 43	16, 51	16, 59	16, 67	16, 75	16, 83	16, 92	17, 00	17, 08	17, 17	20′
40′	17, 17	17, 26	17, 34	17, 43	17, 52	17, 61	17, 70	17, 79	17, 89	17, 98	18, 07	10′
50′	18, 07	18, 17	18, 27	18, 37	18, 46	18, 56	18, 67	18, 77	18, 87	18, 98	19, 08	**3°0′**
87°0′	19, 08	19, 19	19, 30	19, 41	19, 52	19, 63	19, 74	19, 85	19, 97	20, 09	20, 21	50′
10′	20, 21	20, 33	20, 45	20, 57	20, 69	20, 82	20, 95	21, 07	21, 20	21, 34	21, 47	40′
20′	21, 47	21, 61	21, 74	21, 88	22, 02	22, 16	22, 31	22, 45	22, 60	22, 75	22, 90	30′
30′	22, 90	23, 06	23, 21	23, 37	23, 53	23, 69	23, 86	24, 03	24, 20	24, 37	24, 54	20′
40′	24, 54	24, 72	24, 90	25, 08	25, 26	25, 45	25, 64	25, 83	26, 03	26, 23	26, 43	10′
50′	26, 43	26, 64	26, 84	27, 06	27, 27	27, 49	27, 71	27, 94	28, 17	28, 40	28, 64	**2°0′**
88°0′	28, 64	28, 88	29, 12	29, 37	29, 62	29, 88	30, 14	30, 41	30, 68	30, 96	31, 24	50′
10′	31, 24	31, 53	31, 82	32, 12	32, 42	32, 73	33, 05	33, 37	33, 69	34, 03	34, 37	40′
20′	34, 37	34, 72	35, 07	35, 43	35, 80	36, 18	36, 56	36, 96	37, 36	37, 77	38, 19	30′
30′	38, 19	38, 62	39, 06	39, 51	39, 97	40, 44	40, 92	41, 41	41, 92	42, 43	42, 96	20′
40′	42, 96	43, 51	44, 07	44, 64	45, 23	45, 83	46, 45	47, 09	47, 74	48, 41	49, 10	10′
50′	49, 10	49, 82	50, 55	51, 30	52, 08	52, 88	53, 71	54, 56	55, 44	56, 35	57, 29	**1°0′**
89°0′	57, 29	58, 26	59, 27	60, 31	61, 38	62, 50	63, 66	64, 86	66, 11	67, 40	68, 75	50′
10′	68, 75	70, 15	71, 62	73, 14	74, 73	76, 39	78, 13	79, 94	81, 85	83, 84	85, 94	40′
20′	85, 94	88, 14	90, 46	92, 91	95, 49	98, 22	101, 11	104, 17	107, 43	110, 89	114, 59	30′
30′	114, 6	118, 5	122, 8	127, 3	132, 2	137, 5	143, 2	149, 5	156, 3	163, 7	171, 9	20′
40′	171, 9	180, 9	191, 0	202, 2	214, 9	229, 2	245, 6	264, 4	286, 5	312, 5	343, 8	10′
50′	343, 8	382, 0	429, 7	491, 1	573, 0	687, 5	859, 4	1146	1719	3438	–	**0°0′**
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	

ctg 0°–7°

10.8. Forgásszögek szögfüggvényei

I. 0° . . . 90°	**II.** 90° . . . 180°	**III.** 180° . . . 270°	**IV.** 270° . . . 360°
$\sin\alpha$	$\sin(180° - \alpha)$	$-\sin(\alpha - 180°)$	$-\sin(360° - \alpha)$
$\cos\alpha$	$-\cos(180° - \alpha)$	$-\cos(\alpha - 180°)$	$\cos(360° - \alpha)$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}(180° - \alpha)$	$\mathrm{tg}(\alpha - 180°)$	$-\mathrm{tg}(360° - \alpha)$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}(180° - \alpha)$	$\mathrm{ctg}(\alpha - 180°)$	$-\mathrm{ctg}(360° - \alpha)$

10.9. Prímszámok 4000-ig

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79
83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137
139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193
197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257
263	269	271	277	281	283	293	307	311	313	317
331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389
397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661
673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823
827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997	1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049
1051	1061	1063	1069	1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117
1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213
1217	1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289
1291	1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373
1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451	1453
1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511	1523	1531
1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601	1607
1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693
1697	1699	1709	1721	1723	1733	1741	1747	1753	1759	1777
1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867	1871
1873	1877	1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951
1973	1979	1987	1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029
2039	2053	2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113
2129	2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213
2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287	2293
2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357	2371	2377
2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423	2437	2441	2447
2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531	2539	2543	2549	2551
2557	2579	2591	2593	2609	2617	2621	2633	2647	2657	2659
2663	2671	2677	2683	2687	2689	2693	2699	2707	2711	2713
2719	2729	2731	2741	2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797
2801	2803	2819	2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887
2897	2903	2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971
2999	3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079
3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181	3187
3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257	3259	3271
3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329	3331	3343	3347	3359
3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413	3433	3449	3457	3461
3463	3467	3469	3491	3499	3511	3517	3527	3529	3533	3539
3541	3547	3557	3559	3571	3581	3583	3593	3607	3613	3617
3623	3631	3637	3643	3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701
3709	3719	3727	3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797
3803	3821	3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889
3907	3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989

10.10. Összetett számok felbontása 1600-ig (a 2, 3, 5 prímosztók nélkül)

49 = 7 · 7	77 = 7 · 11	91 = 7 · 13	119 = 7 · 17	121 = 11 · 11
133 = 7 · 19	143 = 11 · 13	161 = 7 · 23	169 = 13 · 13	187 = 11 · 17
203 = 7 · 29	209 = 11 · 19	217 = 7 · 31	221 = 13 · 17	247 = 13 · 19
253 = 11 · 23	259 = 7 · 37	287 = 7 · 41	289 = 17 · 17	299 = 13 · 23
301 = 7 · 43	319 = 11 · 29	323 = 17 · 19	329 = 7 · 47	341 = 11 · 31
343 = 7 · 7 · 7	361 = 19 · 19	371 = 7 · 53	377 = 13 · 29	391 = 17 · 23
403 = 13 · 31	407 = 11 · 37	413 = 7 · 59	427 = 7 · 61	437 = 19 · 23
451 = 11 · 41	469 = 7 · 67	473 = 11 · 43	481 = 13 · 37	493 = 17 · 29
497 = 7 · 71	511 = 7 · 73	517 = 11 · 47	527 = 17 · 31	529 = 23 · 23
533 = 13 · 41	539 = 7 · 7 · 11	551 = 19 · 29	553 = 7 · 79	559 = 13 · 43
581 = 7 · 83	583 = 11 · 53	589 = 19 · 31	611 = 13 · 47	623 = 7 · 89
629 = 17 · 37	637 = 7 · 7 · 13	649 = 11 · 59	667 = 23 · 29	671 = 11 · 61
679 = 7 · 97	689 = 13 · 53	697 = 17 · 41	703 = 19 · 37	707 = 7 · 101
713 = 23 · 31	721 = 7 · 103	731 = 17 · 43	737 = 11 · 67	749 = 7 · 107
763 = 7 · 109	767 = 13 · 59	779 = 19 · 41	781 = 11 · 71	791 = 7 · 113
793 = 13 · 61	799 = 17 · 47	803 = 11 · 73	817 = 19 · 43	833 = 7 · 7 · 17
841 = 29 · 29	847 = 7 · 11 · 11	851 = 23 · 37	869 = 11 · 79	871 = 13 · 67
889 = 7 · 127	893 = 19 · 47	899 = 29 · 31	901 = 17 · 53	913 = 11 · 83
917 = 7 · 131	923 = 13 · 71	931 = 7 · 7 · 19	943 = 23 · 41	949 = 13 · 73
959 = 7 · 137	961 = 31 · 31	973 = 7 · 139	979 = 11 · 89	989 = 23 · 43
1001 = 7 · 11 · 13	1003 = 17 · 59	1007 = 19 · 53	1027 = 13 · 79	1037 = 17 · 61
1043 = 7 · 149	1057 = 7 · 151	1067 = 11 · 97	1073 = 29 · 37	1079 = 13 · 83
1081 = 23 · 47	1099 = 7 · 157	1111 = 11 · 101	1121 = 19 · 59	1127 = 7 · 7 · 23
1133 = 11 · 103	1139 = 17 · 67	1141 = 7 · 163	1147 = 31 · 37	1157 = 13 · 89
1159 = 19 · 61	1169 = 7 · 167	1177 = 11 · 107	1183 = 7 · 13 · 13	1189 = 29 · 41
1199 = 11 · 109	1207 = 17 · 71	1211 = 7 · 173	1219 = 23 · 53	1241 = 17 · 73
1243 = 11 · 113	1247 = 29 · 43	1253 = 7 · 179	1261 = 13 · 97	1267 = 7 · 181
1271 = 31 · 41	1273 = 19 · 67	1309 = 7 · 11 · 17	1313 = 13 · 101	1331 = 11 · 11 · 11
1333 = 31 · 43	1337 = 7 · 191	1339 = 13 · 103	1343 = 17 · 79	1349 = 19 · 71
1351 = 7 · 193	1357 = 23 · 59	1363 = 29 · 47	1369 = 37 · 37	1379 = 7 · 197
1387 = 19 · 73	1391 = 13 · 107	1393 = 7 · 199	1397 = 11 · 127	1403 = 23 · 61
1411 = 17 · 83	1417 = 13 · 109	1421 = 7 · 7 · 29	1441 = 11 · 131	1457 = 31 · 47
1463 = 7 · 11 · 19	1469 = 13 · 113	1477 = 7 · 211	1501 = 19 · 79	1507 = 11 · 137
1513 = 17 · 89	1517 = 37 · 41	1519 = 7 · 7 · 31	1529 = 11 · 139	1537 = 29 · 53
1541 = 23 · 67	1547 = 7 · 13 · 17	1561 = 7 · 223	1573 = 11 · 11 · 13	1577 = 19 · 83
1589 = 7 · 227	1591 = 37 · 43			

10.11. *A binomiális együtthatók (n = 20-ig)* $\binom{n}{k}$

Pascal-háromszög

n	k = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

n \ *k*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

10.12. *Pitagorasz-féle számhármasok (c = 100-ig)*

a	3	5	7	8	9	11	12	13	16	20	28	33	36	39	48	65
b	4	12	24	15	40	60	35	84	63	21	45	56	77	80	55	72
c	5	13	25	17	41	61	37	85	65	29	53	65	85	89	73	97

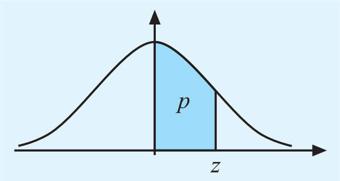
10.13. Faktoriálisok (n = 100-ig)

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	$2,092278989 \cdot 10^{13}$
17	$3,556874281 \cdot 10^{14}$
18	$6,402373706 \cdot 10^{15}$
19	$1,216451004 \cdot 10^{17}$
20	$2,432902008 \cdot 10^{18}$
21	$5,109094217 \cdot 10^{19}$
22	$1,124000728 \cdot 10^{21}$
23	$2,585201674 \cdot 10^{22}$
24	$6,204484017 \cdot 10^{23}$
25	$1,551121004 \cdot 10^{25}$
26	$4,032914611 \cdot 10^{26}$
27	$1,088886945 \cdot 10^{28}$
28	$3,048883446 \cdot 10^{29}$
29	$8,841761994 \cdot 10^{30}$
30	$2,652528598 \cdot 10^{32}$
31	$8,222838654 \cdot 10^{33}$
32	$2,631308369 \cdot 10^{35}$
33	$8,683317619 \cdot 10^{36}$
34	$2,952327990 \cdot 10^{38}$
35	$1,033314797 \cdot 10^{40}$
36	$3,719933268 \cdot 10^{41}$
37	$1,376375309 \cdot 10^{43}$
38	$5,230226175 \cdot 10^{44}$
39	$2,039788208 \cdot 10^{46}$
40	$8,159152832 \cdot 10^{47}$
41	$3,345252661 \cdot 10^{49}$
42	$1,405006118 \cdot 10^{51}$
43	$6,041526306 \cdot 10^{52}$
44	$2,658271575 \cdot 10^{54}$
45	$1,196222209 \cdot 10^{56}$
46	$5,502622160 \cdot 10^{57}$
47	$2,586232415 \cdot 10^{59}$
48	$1,241391559 \cdot 10^{61}$
49	$6,082818640 \cdot 10^{62}$
50	$3,041409320 \cdot 10^{64}$
51	$1,551118753 \cdot 10^{66}$
52	$8,065817517 \cdot 10^{67}$
53	$4,274883284 \cdot 10^{69}$
54	$2,308436973 \cdot 10^{71}$
55	$1,269640335 \cdot 10^{73}$
56	$7,109985878 \cdot 10^{74}$
57	$4,052691950 \cdot 10^{76}$
58	$2,350561331 \cdot 10^{78}$
59	$1,386831185 \cdot 10^{80}$
60	$8,320987113 \cdot 10^{81}$
61	$5,075802139 \cdot 10^{83}$
62	$3,146997326 \cdot 10^{85}$
63	$1,982608315 \cdot 10^{87}$
64	$1,268869322 \cdot 10^{89}$
65	$8,247650592 \cdot 10^{90}$
66	$5,443449391 \cdot 10^{92}$
67	$3,647111092 \cdot 10^{94}$
68	$2,480035542 \cdot 10^{96}$
69	$1,711224524 \cdot 10^{98}$
70	$1,197857167 \cdot 10^{100}$
71	$8,504785886 \cdot 10^{101}$
72	$6,123445838 \cdot 10^{103}$
73	$4,470115462 \cdot 10^{105}$
74	$3,307885442 \cdot 10^{107}$
75	$2,480914081 \cdot 10^{109}$
76	$1,885494702 \cdot 10^{111}$
77	$1,451830920 \cdot 10^{113}$
78	$1,132428118 \cdot 10^{115}$
79	$8,946182131 \cdot 10^{116}$
80	$7,156945705 \cdot 10^{118}$
81	$5,797126021 \cdot 10^{120}$
82	$4,753643337 \cdot 10^{122}$
83	$3,945523970 \cdot 10^{124}$
84	$3,314240135 \cdot 10^{126}$
85	$2,817104114 \cdot 10^{128}$
86	$2,422709538 \cdot 10^{130}$
87	$2,107757298 \cdot 10^{132}$
88	$1,854826423 \cdot 10^{134}$
89	$1,650795516 \cdot 10^{136}$
90	$1,485715964 \cdot 10^{138}$
91	$1,352001528 \cdot 10^{140}$
92	$1,243841405 \cdot 10^{142}$
93	$1,156772507 \cdot 10^{144}$
94	$1,087366157 \cdot 10^{146}$
95	$1,032997849 \cdot 10^{148}$
96	$9,916779349 \cdot 10^{149}$
97	$9,619275968 \cdot 10^{151}$
98	$9,426890449 \cdot 10^{153}$
99	$9,332621544 \cdot 10^{155}$
100	$9,332621544 \cdot 10^{157}$

10.14. A standard normális eloszlás

A táblázatban talált szám azt adja meg, hogy a standard normális eloszlású változó mekkora valószínűséggel esik a $[0; z]$ intervallumba. Ez a szám az ábrán besatírozott területnek a mérőszáma.

$$z \mapsto p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	0,1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	0,4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	0,4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	0,4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3,1	4990	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3,2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995
3,3	4995	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4997
3,4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998
3,5	0,4997673									
4,0	0,4999683									
4,5	0,4999966									
5,0	0,4999997									