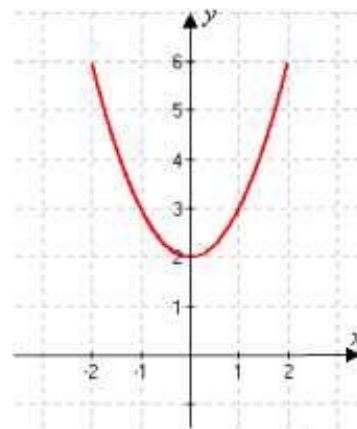


Függvények Megoldások

- 1) Az ábrán egy $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)

- a) $x \mapsto x^2 - 2$
 b) $x \mapsto x^2 + 2$
 c) $x \mapsto (x + 2)^2$



Megoldás:

b) Az x^2 függvény képét eltoljuk az y tengely mentén két egységgel fölfelé, így az $x \mapsto x^2 + 2$ függvény képét kapjuk. (2 pont)

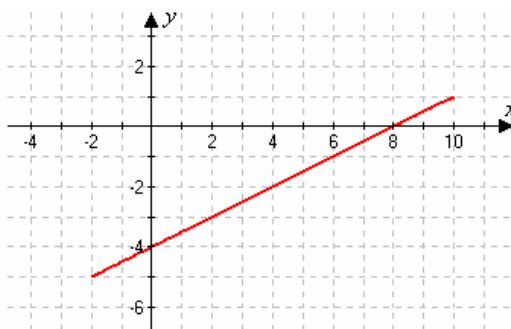
- 2) Határozza meg az 1. feladatban megadott, $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény értékkészletét! (3 pont)

Megoldás:

Az értékkészlet a felvett függvényértékek halmaza. $2 \leq f(x) \leq 6$ vagy $[2;6]$ (3pont)

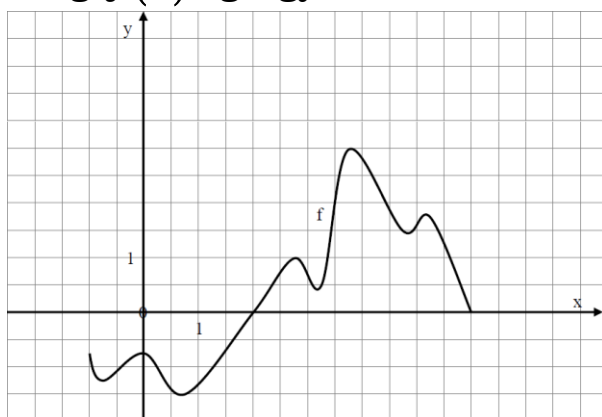
- 3) Ábrázolja az $f(x) = 0,5x - 4$ függvényt a $[-2;10]$ intervallumon! (2 pont)

Megoldás:



(2 pont)

- 4) A $[-1;6]$ -on értelmezett $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályát a grafikonjával adtuk meg. Határozza meg az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldását! Adja meg $f(x)$ legnagyobb értékét! (3 pont)



Megoldás:

$2 \leq x \leq 6$ (2 pont)

$f(x)$ legnagyobb értéke: 3 (1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Az f és g függvényeket a valós számok halmazán értelmezzük a következő képletek szerint: $f(x) = (x+1)^2 - 2$; $g(x) = -x - 1$

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az f függvényt! (Az ábrán szerepeljen a grafikonnak legalább a $-3,5 \leq x \leq 1$ intervallumhoz tartozó része.) (4 pont)

b) Ábrázolja ugyanabban a koordináta-rendszerben a g függvényt! (2 pont)

c) Oldja meg az $(x+1)^2 - 2 \leq -x - 1$ egyenlőtlenséget! (6 pont)

Megoldás:

a) $f(x)$ ábrázolása (4 pont)

b) Ábra (2 pont)

c) $(x+1)^2 - 2 + x + 1 \leq 0$ (1 pont)

$x^2 + 3x \leq 0$ (1 pont)

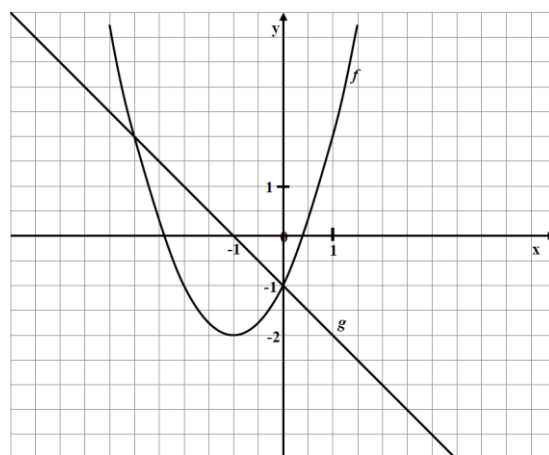
Az egyenlőség teljesül, ha $x_1 = -3$ vagy

$x_2 = 0$. (2 pont)

A megoldás: $-3 \leq x \leq 0$ (2 pont)

A feladat grafikusán is megoldható.

Összesen: 12 pont



6) Az f függvényt a $[-2; 6]$ intervallumon a grafikonjával értelmeztük. Mekkora f legkisebb, illetve legnagyobb értéke? Milyen x értékekhez tartoznak ezek a szélsőértékek? (4 pont)

Megoldás:

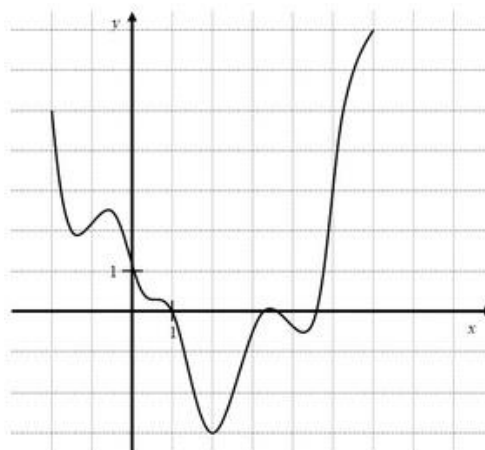
f legkisebb értéke -3 . (1 pont)

Ez az $x = 2$ értékhez tartozik. (1 pont)

f legnagyobb értéke 7 . (1 pont)

Ez az $x = 6$ értékhez tartozik. (1 pont)

Összesen: 4 pont



7) Adott a következő egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} 2 \lg(y+1) &= \lg(x+11) \\ y &= 2x \end{aligned} \right\}$$

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)

b) Milyen x , illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)

c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)

d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)

Megoldás:

- a) Ábra (2 pont)
 b) Az (1) egyenlet miatt $y > -1$ (1 pont)
 és $x > -11$ (1 pont)

- c) $\lg(y+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)
 $\lg(2x+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt (1 pont)

$$(2x+1)^2 = (x+11) \quad (1 \text{ pont})$$

$$4x^2 + 3x - 10 = 0 \quad (2 \text{ pont})$$

$$x_1 = \frac{5}{4} \text{ és } x_2 = -2 \quad (1 \text{ pont})$$

$$y_1 = \frac{5}{2} \text{ és } y_2 = -4 \quad (1 \text{ pont})$$

A másodfokú egyenletrendszer megoldásai: $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$ illetve $(-2; -4)$ (1 pont)

amiből a második számpár nem tartozik az eredeti egyenlet értelmezési tartományába, (1 pont)

az első számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert. (1 pont)

- d) **A $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$ pont bejelölése.** (2 pont)

Összesen: 17 pont

- 8) **Adja meg az $5x - 3y = 2$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit!** (2 pont)

Megoldás:

A metszéspont: $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ (2 pont)

9)

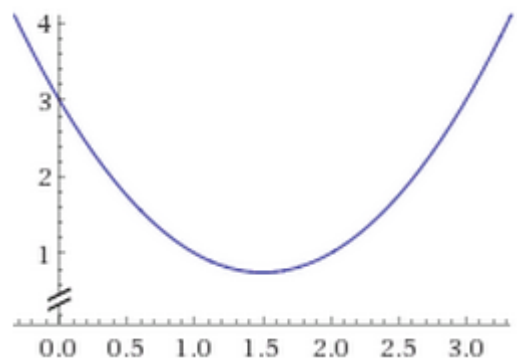
- a) **Ábrázolja a $[-2; 4]$ -on értelmezett, $x \rightarrow (x-1,5)^2 + 0,75$ hozzárendeléssel megadott függvényt!** (2 pont)

- b) **Állapítsa meg a fenti függvény minimumának helyét és értékét!** (2 pont)

- c) **Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 - 2x$ egyenletet!** (8 pont)

Megoldás:

- a) Ábrázolás (2 pont)
 b) A minimum helye: $x = 1,5$ (1 pont)
 Értéke: **0,75** (1 pont)



c) Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$x^2 - 3x + 3 = 1 - 4x + 4x^2 \quad (2 \text{ pont})$$

$$\text{Rendezve } 3x^2 - x - 2 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Gyökei: } x_1 = 1 \text{ illetve } x_2 = -\frac{2}{3} \quad (2 \text{ pont})$$

De $x_1 = 1$ nem megoldás (nem teszi igazgá az eredeti egyenletet) (1 pont)

Az $x = -\frac{2}{3}$ esetén mindkét oldal értéke $\frac{7}{3}$, ezért ez megfelelő valós gyök.

(2 pont)

Összesen: 12 pont

10) A valós számok halmazán értelmezett $x \rightarrow -(x-1)^2 + 4$ függvénynek minimuma vagy maximuma van? Adja meg a szélsőérték helyét és értékét! (3 pont)

Megoldás:

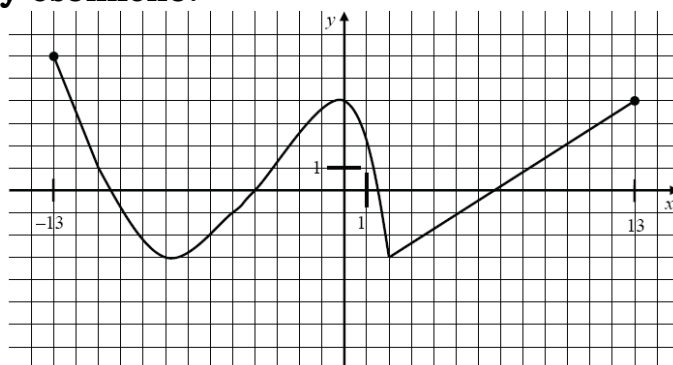
Maximuma van, (1 pont)

szélsőérték helye: **1**; (1 pont)

értéke: **4**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Adjon meg egy olyan zárt intervallumot, ahol a grafikonjával megadott alábbi függvény csökkenő! (2 pont)



Megoldás:

Például: **$[0;2]$ vagy $[-13;-8]$** (2 pont)

12) Adott az $f : \mathbb{R}^- \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-x}$ függvény. Határozza meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyhez tartozó függvényérték 4. (2 pont)

Megoldás:

$x = -16$ (2 pont)

13) Adja meg a $[-2;3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2 + 1$ függvény értékkészletét! (3 pont)

Megoldás:

A függvény legkisebb értéke az 1, (1 pont)

az adott intervallum végpontjaiban a függvény értéke 5, illetve 10, (1 pont)

a függvény értékkészlete az $[1;10]$ intervallum. (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 14) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett az $x \mapsto x^2 - 5x$ másodfokú függvény zérushelyeit! Számítsa ki a függvény helyettesítési értékét az 1,2 helyen! (3 pont)

Megoldás:

Zérushelyek: **0** és **5**. (2 pont)
A helyettesítési érték **-4, 56**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 15) Mennyi az $f(x) = -|x| + 10$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény legnagyobb értéke, és hol veszi fel ezt az értéket? (2 pont)

Megoldás:

A legnagyobb érték: **10**. (1 pont)
Ezt az $x = 0$ helyen veszi fel. (1 pont)

Összesen: 2 pont

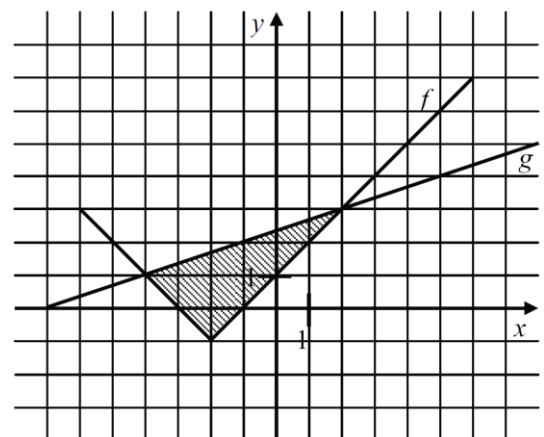
16)

- a) Fogalmazza meg, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x+2| - 1$ függvény grafikonja milyen transzformációkkal származtatható az $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f_0(x) = |x|$, függvény grafikonjából! Ábrázolja az f függvényt a $[-6; 6]$ intervallumon! (5 pont)

- b) Írja fel az $A(-4; 1)$ és $B(5; 4)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét! Mely pontokban metszi az AB egyenes az f függvény grafikonját? (Válaszát számítással indokolja!) (7 pont)

Megoldás:

- a) Ha az $f_0 = |x|$ grafikonját előbb a $(-2; 0)$, (1 pont)
majd a $(0; -1)$ vektorral eltoljuk, az f függvény grafikonját kapjuk. (1 pont)
Helyes grafikon. (3 pont)
- b) Az AB egyenes egyenlete: $x - 3y = -7$ (3 pont)
Az egyik közös pont: **A(-4; 1)** (2 pont)
Az egyik közös pont: **B(2; 3)** (2 pont)



Összesen: 12 pont

- 17) Adja meg a $3x + 2y = 18$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

(0; 9) (2 pont)

18) A valós számok halmazán értelmezett f másodfokú függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját a $v(2; -4,5)$ vektorral eltoltuk.

- a) Adja meg az f függvény hozzárendelési utasítását képlettel! (3 pont)
 b) Határozza meg f zérushelyeit! (4 pont)
 c) Ábrázolja f grafikonját a $[-2; 6]$ intervallumon! (4 pont)
 Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!
 d) $\frac{1}{2}x^2 \leq 2x + \frac{5}{2}$ (6 pont)

Megoldás:

a) A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 4,5 \quad (3 \text{ pont})$$

b) A $0,5(x-2)^2 - 4,5 = 0$ egyenletet kell megoldani. (1 pont)

$$0,5(x-2)^2 - 4,5 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_1 = 5 \quad (1 \text{ pont})$$

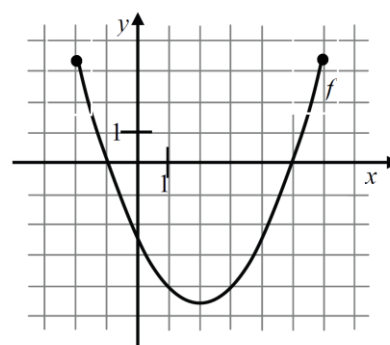
$$x_2 = -1 \quad (1 \text{ pont})$$

c) Ábra (4 pont)

d) Átrendezve az egyenlőtlenséget, éppen az $f(x) \leq 0$ alakhoz jutunk. (3 pont)

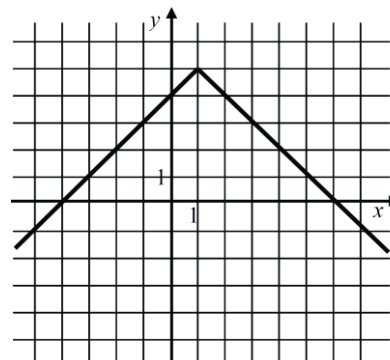
Ennek az egész megoldásai: $-1; 0; 1; 2; 3; 5$. (3 pont)

A feladat megoldható grafikusán is.



Összesen: 17 pont

19) A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto |x|$ függvényt transzformáltuk. Az alábbi ábra az így kapott f függvény grafikonjának egy részletét mutatja. Adja meg f hozzárendelési utasítását képlettel! (3 pont)



Megoldás:

A hozzárendelési utasítás: $x \mapsto -|x-1| + 5$ (3 pont)

A hozzárendelési utasítás megadható a függvény két részre bontásával is.

20) Legyen f a valós számok halmazán értelmezett függvény,

$$f(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Mennyi az f függvény helyettesítési értéke, ha $x = \frac{\pi}{3}$?

Írja le a számolás menetét! (3 pont)

Megoldás:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1 \text{ pont})$$

$$= 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \quad (1 \text{ pont})$$

$$= -1 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

21) Az $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto 3 + \log_2 x$ függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?

A: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto 3 \log_2 x$

B: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \log_2(8x)$

C: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \log_2(3x)$

D: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \log_2(x^3)$ (2 pont)

Megoldás:

A helyes válasz betűjele: **B** (2 pont)

22)

a) Rajzolja meg derékszögű koordináta-rendszerben a $]-1;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto -|x-2|+3$ hozzárendelésű függvény grafikonját! (4 pont)

b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét, és adja meg az összes zérushelyét! (3 pont)

c) Döntse el, hogy a $P(3,2;1,58)$ pont rajta van-e a függvény grafikonján! Válaszát számítással indokolja! (2 pont)

d) Töltse ki az alábbi táblázatot, és adja meg a függvényértékek (a hét szám) mediánját! (3 pont)

Megoldás:

a) Ábra (4 pont)

b) Az értékkészlet az $[-1;3]$ intervallum, (2 pont)

a függvény zérushelye az $(x =) 5$ (1 pont)

c) **P nincs a grafikonon,** (1 pont)

mert pl. $-|3,2-2|+3 = 1,8$ (1 pont)

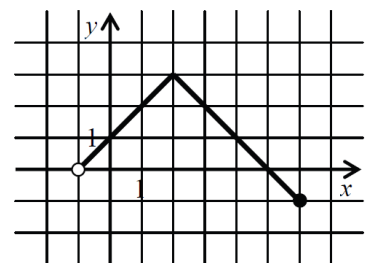
d)

| | | | | | | | |
|------------|------|---|-----|---|------|---|------|
| x | -0,5 | 0 | 1,7 | 2 | 2,02 | 4 | 5,5 |
| $- x-2 +3$ | 0,5 | 1 | 2,7 | 3 | 2,98 | 1 | -0,5 |

(1 pont)

Sorba rendezés: -0,5; 0,5; 1; 1; 2,7; 2,98; 3. (1 pont)

A medián **1**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

- 23) Milyen valós számokat jelöl az a , ha tudjuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő? (2 pont)

Megoldás:

$a > 1$ (2 pont)

- 24) Adja meg képlettel egy olyan, a valós számok halmazán értelmezett függvény hozzárendelési utasítását, amelynek (abszolút) maximuma van! A megadott függvénynek állapítsa meg a maximumhelyét is! (3 pont)

Megoldás:

Például: $f : x \mapsto -x^2 - 2x - 1$ (2 pont)

Abszolút maximuma van $x = -1$ helyen. (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 25) A következő két függvény mindegyikét a valós számok halmazán értelmezzük:

$f(x) = 3 \sin x$; $g(x) = \sin 3x$.

Adja meg mindkét függvény értékkészletét! (2 pont)

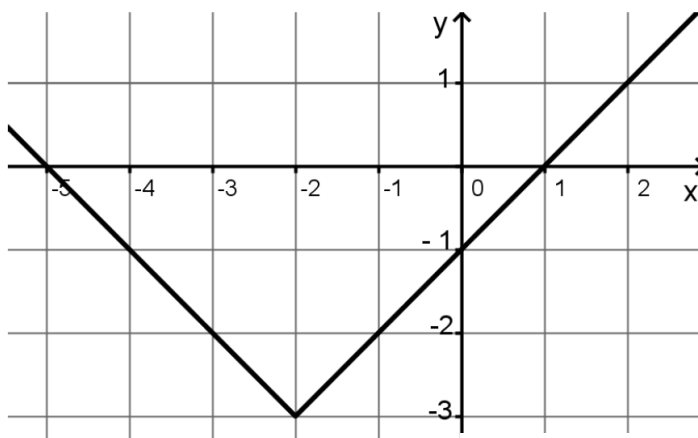
Megoldás:

f értékkészlete: $R_f = [-3; 3]$ (1 pont)

g értékkészlete: $R_g = [-1; 1]$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

- 26) Az ábrán a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x + a| + b$ függvény grafikonjának egy részlete látható. Adja meg a és b értékét! (2 pont)



Megoldás:

$a = 2$ (1 pont)

$b = -3$ (1 pont)

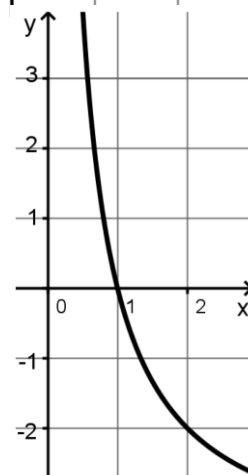
Összesen: 2 pont

- 27) István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ ($x > 0$)

függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).

Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

- István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.
- István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz -2 -t rendel.
- István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. (2 pont)



Megoldás:

b). (2 pont)

28) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = (x+2)^2 + 4$ függvény.
Adja meg az f függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

Megoldás:

A minimum helye: -2 (1 pont)

A minimum értéke: 4 (1 pont)

Összesen: (2 pont)

29) Az alább felsorolt, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket közös koordinátarendszerben ábrázoljuk. A három függvény közül kettőnek a grafikonja megegyezik, a harmadik eltér tőlük. Melyik függvény grafikonja tér el a másik két függvény grafikonjától? (2 pont)

a) $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$

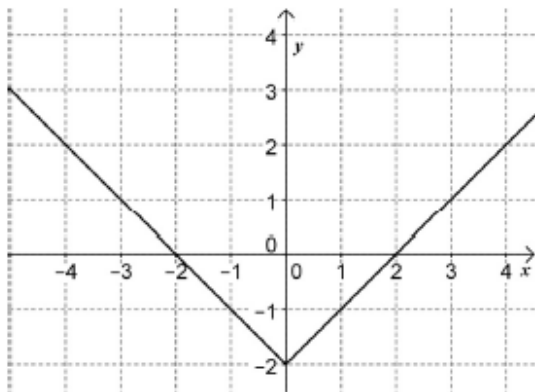
b) $x \mapsto \sin x$

c) $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Megoldás:

A helyes válasz betűjele: a) (2 pont)

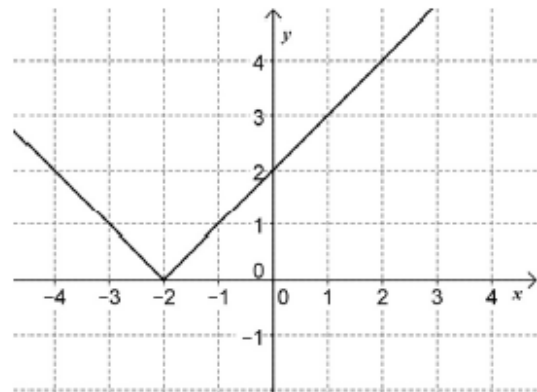
30) Az alábbi hozzárendelési utasítással megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények közül kettőnek egy-egy részletét ábrázoltuk. Adja meg a grafikonokhoz tartozó hozzárendelési utasítások betűjelét! (2 pont)



1)

A) $x \mapsto |x+2|$

B) $x \mapsto |x-2|$



2)

C) $x \mapsto |x|-2$

D) $x \mapsto |x|+2$

Megoldás:

1) párja C) (1 pont)

2) párja A) (1 pont)

Összesen: 2 pont

31) Adja meg az $x \rightarrow x^2 + 10x + 21$ ($x \in \mathbb{R}$) másodfokú függvény minimumhelyét és minimumának értékét! Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 5)^2 - 4 \quad (2 \text{ pont})$$

A minimumhely **-5**. (1 pont)

A minimum értéke **-4**. (1 pont)

Összesen: 4 pont

32) Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá: $f(x) = 5x + 5,25$ és $g(x) = x^2 + 2x + 3,5$

a) Számítsa ki az alábbi táblázatok hiányzó értékeit! (3 pont)

| | | | |
|--------|----------|--------|------------|
| x | 3 | x | |
| $f(x)$ | | $g(x)$ | 2,5 |

b) Adja meg a g függvény értékkészletét! (3 pont)

c) Oldja meg az $5x + 5,25 > x^2 + 2x + 3,5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (6 pont)

Megoldás:

a) $f(3) = 20,25$ (1 pont)

$$x^2 + 2x + 3,5 = 2,5 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x = -1 \quad (1 \text{ pont})$$

b) A függvény hozzárendelési utasítását átalakítva: $x^2 + 2x + 3,5 = (x + 1)^2 + 2,5$ (1 pont)

A függvény minimuma a 2,5. (1 pont)

Az értékkészlet: $[2,5; \infty[$ (1 pont)

c) Rendezés után: $x^2 - 3x - 1,75 < 0$. (1 pont)

$$\text{Az } x^2 - 3x - 1,75 = 0 \text{ egyenlet gyökei: } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ és } x_2 = \frac{7}{2} . \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, (1 pont)

$$\text{ezért az egyenlőtlenség megoldása: } -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2} . \quad (2 \text{ pont})$$

Összesen: 12 pont

33) Adja meg az alábbi hozzárendelési szabályokkal megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények értékkészletét!

$$f(x) = 2 \sin x$$

$$g(x) = \cos 2x$$

(2 pont)

Megoldás:

$$f \text{ értékkészlete: } [-2; 2] \quad (1 \text{ pont})$$

$$g \text{ értékkészlete: } [-1; 1] \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

34) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

- a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)
- b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)
- c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm²-ben mért számértéke. (1 pont)
- d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)

Megoldás:

- a) igaz (1 pont)
- b) hamis (1 pont)
- c) igaz (1 pont)
- d) hamis (1 pont)

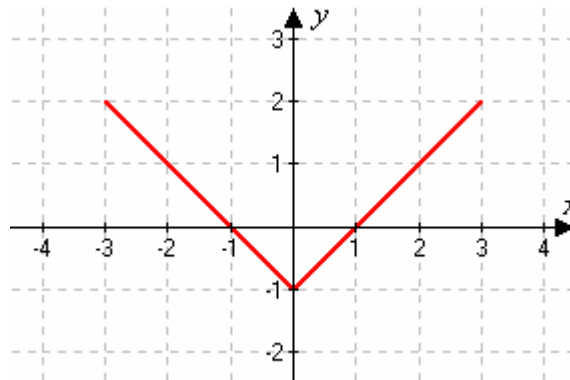
Összesen: 4 pont

35)

- a) Rajzolja fel a $[-3; 3]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto |x| - 1$ függvény grafikonját! (2 pont)
- b) Mennyi a legkisebb függvényérték? (1 pont)

Megoldás:

a)



- b) A legkisebb függvényérték: -1 .

(1 pont)

Összesen: 3 pont

36) Melyik az ábrán látható egyenes egyenlete az alábbiak közül? (2 pont)

A: $y = 2x + 3$

B: $y = -2x + 3$

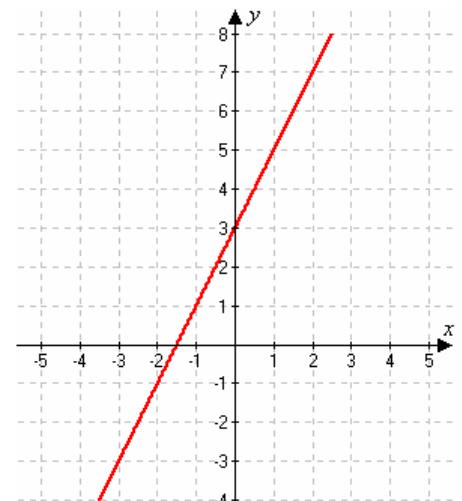
C: $y = 2x - 1,5$

D: $y = 2x - 3$

Megoldás:

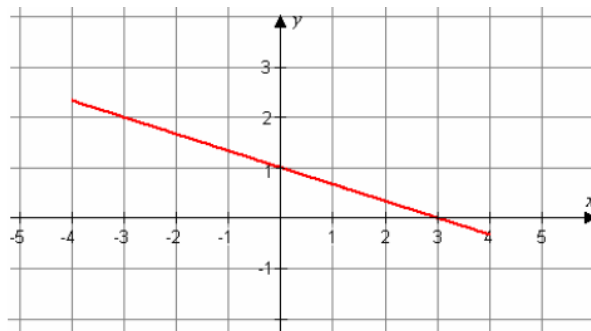
A helyes válasz betűjele: **A**.

(2 pont)



37) Az ábrán egy $[-4;4]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki, hogy melyik formula adja meg helyesen a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)

- a) $x \mapsto \frac{1}{3}x + 1$
- b) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 1$
- c) $x \mapsto -3x + 1$
- d) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 3$



Megoldás:

- b) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 1$ (2 pont)

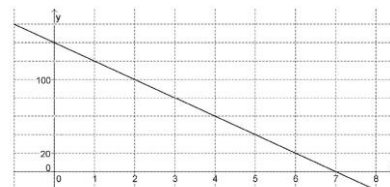
Összesen: 2 pont

38) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x - 4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x) = 6$? (2 pont)

Megoldás:

$x_1 = -2, x_2 = 10$ (2 pont)

39) Az ábrán az $x \mapsto m \cdot x + b$ lineáris függvény grafikonjának egy részlete látható. Határozza meg m és b értékét! (3 pont)



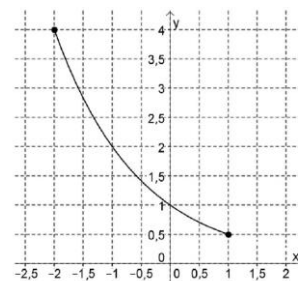
Megoldás:

$b = 140$ (1 pont)
 $m = -20$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

40) Az ábrán az $f : [-2; 1] \Rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a^x$ függvény grafikonja látható.

- a) Adja meg az f függvény értékkészletét! (1 pont)
- b) Határozza meg az a szám értékét! (2 pont)



Megoldás:

Az f értékkészlete $[0,5; 4]$. (1 pont)

$a = 0,5$. (2 pont)

Összesen: 3 pont

41) Válassza ki az f függvény hozzárendelési szabályát az A, B, C, D lehetőségek közül úgy, hogy az megfeleljen az alábbi értéktáblázatnak! (2 pont)

| | | | |
|--------|----|---|----|
| x | -2 | 0 | 2 |
| $f(x)$ | -4 | 0 | -4 |

A: $f(x) = 2x$ B: $f(x) = x^2$ C: $f(x) = -2x$ D: $f(x) = -x^2$

Megoldás:

D (2 pont)

42) Az ábrán a $[-1; 5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható.

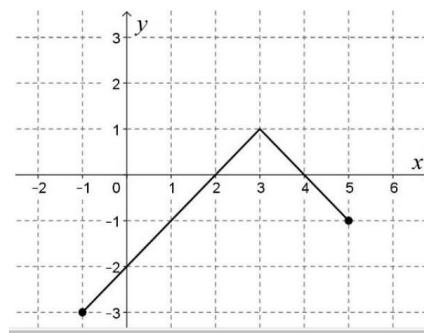
Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)

A: $x \mapsto |x - 3| + 1$

B: $x \mapsto -|x + 3| + 1$

C: $x \mapsto -|x - 3| + 1$

D: $x \mapsto -|x + 3| - 1$



Megoldás:

C

(2 pont)

43)

a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0; 2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (6 \text{ pont})$$

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2; 2]$ zárt intervallum.

III) A $h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik

a $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

Megoldás:

a) (A kért szöget α -val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Ebből } \cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad (1 \text{ pont})$$

azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = 60^\circ$ (1 pont)

b) Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{\pi}{3}$, vagy $x = \frac{5\pi}{3}$. (2 pont)

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{2\pi}{3}$, vagy $x = \frac{4\pi}{3}$. (2 pont)

c)

I) **igaz**

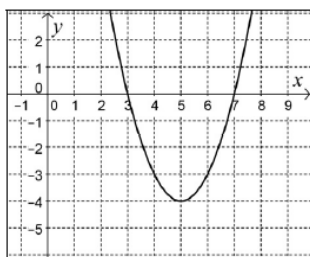
II) **hamis**

III) **hamis**

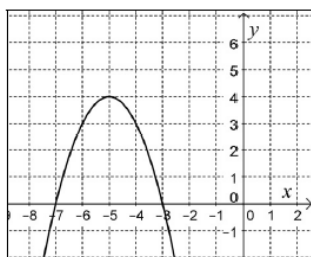
(2 pont)

Összesen: 12 pont

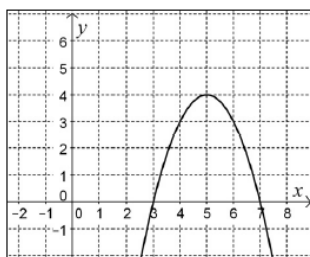
- 44) Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto -(x - 5)^2 + 4$ függvény.
Melyik ábrán látható e függvény grafikonjának egy részlete? (2 pont)



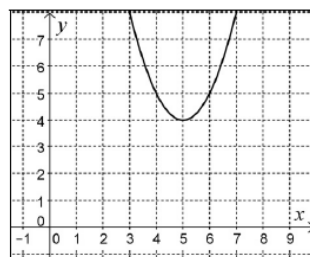
A



B



C



D

Megoldás:

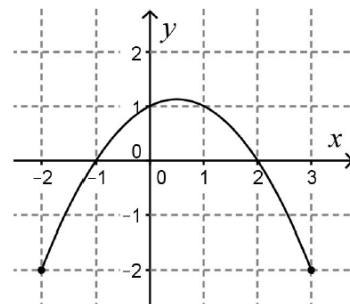
A helyes válasz: **C** (2 pont)

- 45) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \rightarrow 1 + \cos x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

A függvény értékkészlete: **[0;2]** (2 pont)

- 46) Az ábrán látható függvény értelmezési tartománya a $[-2;3]$ intervallum, két zérushelye a -1 és 2 . Az értelmezési tartományának mely részhalmazán vesz fel a függvény pozitív értéket? (2 pont)



Megoldás:

A kérdéses intervallum: **]-1;2[** (2 pont)

- 47) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto (x - 2)^2$ függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

Megoldás:

A minimum helye: **2**. (1 pont)

A minimum értéke: **0**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

48)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$|x - 3| = 3x - 1. \quad (7 \text{ pont})$$

Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = a \cdot x + b$ lineáris függvény zérushelye -4 . Tudjuk továbbá, hogy az $x = 4$ helyen a függvényérték 6 .

b) Adja meg a és b értékét! (6 pont)

Megoldás:

a) Az egyenlet alakja $x \geq 3$ esetén: $x - 3 = 3x - 1$, (1 pont)

amiből $x = -1$, (1 pont)

ami nem megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Az egyenlet alakja $x < 3$ esetén: $-(x - 3) = 3x - 1$, (1 pont)

amiből $x = 1$. (2 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozva. (1 pont)

- b) A megadott feltételek szerint $a \cdot (-4) + b = 0$, (2 pont)
 továbbá $a \cdot 4 + b = 6$. (1 pont)
 Az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve és a másik egyenletbe helyettesítve vagy a két egyenletet összeadva kapjuk, hogy (1 pont)
 $b = 3$, (1 pont)
 $a = 0,75$. (1 pont)

Összesen: 13 pont

- 49) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 1 + \sin x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

Felírjuk a $\sin x$ függvény értékkészletét.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

Ha az így kapott egyenlőtlenség minden oldalához hozzáadunk egyet, megkapjuk az $1 + \sin x$ függvény értékkészletét.

$$0 \leq 1 + \sin x \leq 2$$

(2 pont)

Tehát a megoldás $[0; 2]$.

Összesen: 2 pont

- 50) Az alábbi függvények a pozitív számok halmazán értelmezettek:

$$f(x) = -5x$$

$$g(x) = 5\sqrt{x}$$

$$h(x) = \frac{5}{x}$$

$$i(x) = 5 - x$$

Adja meg annak a függvénynek a betűjelét, amelyik fordított arányosságot ír le! (2 pont)

Megoldás:

Egy függvény akkor ír le fordított arányosságot, ha x és y értékek szorzata állandó, így a $h(x)$ függvény a megoldás. (2 pont)

Összesen: 2 pont

- 51) Ábrázolja a $[-3; 6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto |x - 2| - 3$ függvényt!

(4 pont)

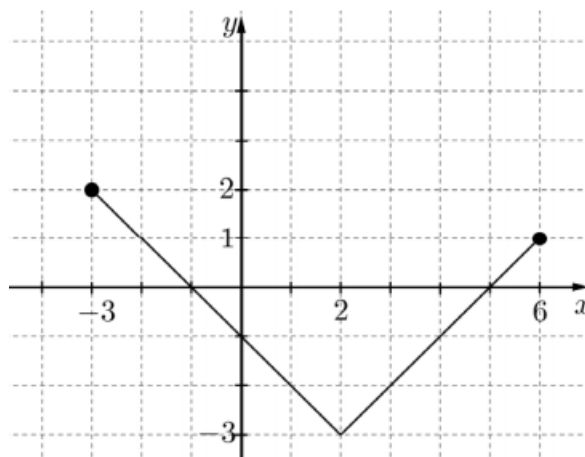
Megoldás:

A függvény grafikonja az abszolútérték függvény grafikonjából származik. (1 pont)

Az abszolút értéken belüli $|x - 2|$ miatt vízszintesen pozitív irányba, az abszolút értéken kívüli $|x - 2| - 3$ miatt pedig függőlegesen negatív irányba toljuk az eredeti függvényt. (2 pont)

Végül a függvényt a megadott intervallumra szűkítjük. (1 pont)

Összesen: 4 pont



52)

- a) Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit! (3 pont)
- b) Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely -3 -hoz -1 -et és 3 -hoz 7 -et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x \mapsto ax + b$ alakban adja meg!) (5 pont)
- c) Adott az $A(-3;-1)$ és a $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz! (9 pont)

Megoldás:

- a) A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe, a $C(c_1;c_2)$ pont koordinátáira felírhatóak az alábbi egyenletek. (1 pont)

$$0 = \frac{-3+3+c_1}{3}, \text{ amelyre } c_1 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$0 = \frac{-1+7+c_2}{3}, \text{ amelyre } c_2 = -6 \quad (1 \text{ pont})$$

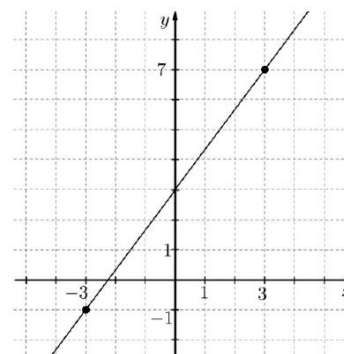
- b) A függvény képe egy egyenes, meredeksége

$$m = \frac{7-(-1)}{3-(-3)} = \frac{4}{3}. \quad (2 \text{ pont})$$

A $(3;7)$ ponton átmenő $\frac{4}{3}$ meredekségű egyenes

egyenlete pedig $y - 7 = \frac{4}{3}(x - 3)$, így a hozzárendelés

szabálya $x \mapsto \frac{4}{3}x + 3$. (3 pont)



- c) Jelöljük a kérdéses pontot P -vel! Mivel a P pont az x tengelyen van, így a második koordinátája 0 . (1 pont)

Ha $P(x;0)$, akkor $\overline{PA} = (-3-x; -1)$ és $\overline{PB} = (3-x; 7)$. (2 pont)

\overline{PA} és \overline{PB} vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha \overline{PA} és \overline{PB} vektorok skaláris szorzata 0 . (1 pont)

$$(-3-x) \cdot (3-x) + (-1) \cdot 7 \Rightarrow x^2 - 8 - 7 = 0, \text{ amelynek gyökei } x_1 = 4 \text{ és } x_2 = -4.$$

(4 pont)

Tehát a feladatnak két megoldása van, $P_1(4;0)$ és $P_2(-4;0)$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

- 53) Az alábbi hozzárendelési utasítások közül adja meg annak a betűjelét, amely a 0 -hoz 4 -et, a 2 -höz pedig 0 -t rendel!

$$A: x \mapsto 2x + 4 \quad B: x \mapsto 2x - 4 \quad C: x \mapsto -2x + 4 \quad D: x \mapsto -2x - 4$$

(2 pont)

Megoldás:

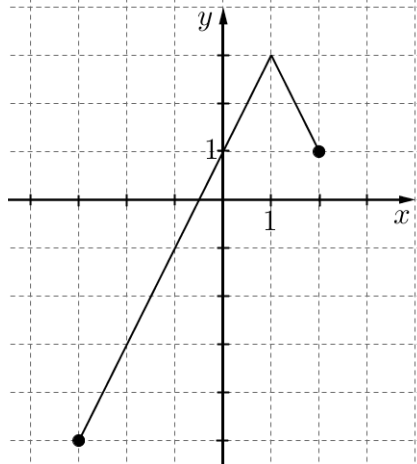
$$f(0) = -2 \cdot (0) + 4 = 4$$

$$f(2) = -2 \cdot (2) + 4 = 0$$

\Rightarrow tehát a megoldás a $C: x \mapsto -2x + 4$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

- 54) Az alábbi ábrán a $[-3;2]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto -2|x-1|+3$ függvény grafikonja látható. Adja meg a függvény értékkészletét! (2 pont)



Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[-5; 3]$

(2 pont)

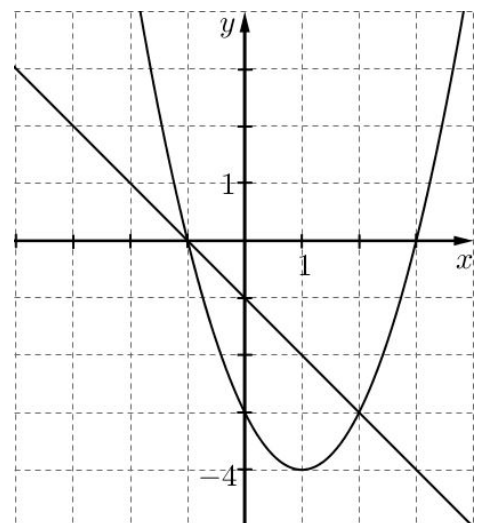
Összesen: 2 pont

- 55) Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény: $f : x \mapsto (x-1)^2 - 4$.

- a) Számítsa ki az f függvény $x = -5$ helyen felvett helyettesítési értékét! (2 pont)
- b) Ábrázolja az f függvényt, és adja meg szélsőértékének helyét és értékét! (5 pont)
- c) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $(x-1)^2 - 4 = x - 1$. (5 pont)

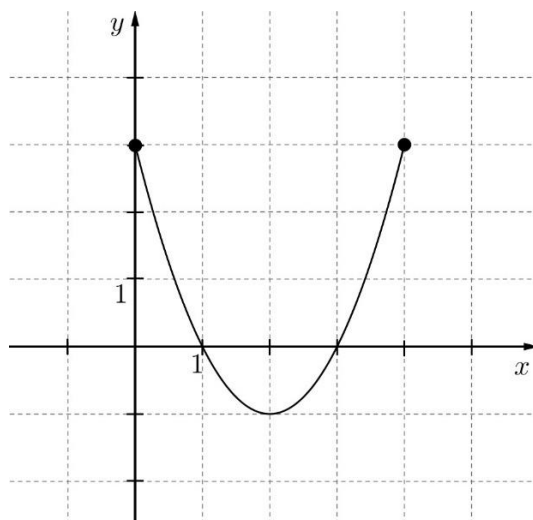
Megoldás:

- a) $f(-5) = (-5-1)^2 - 4 = 32$ (2 pont)
- b) Az ábrázolt függvény grafikonja az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából eltolással származik (1 pont)
 tengelypontjának első koordinátája 1, (1 pont)
 második koordinátája -4. (1 pont)
A függvénynek az $x = 1$ helyen van szélsőértéke (minimuma), melynek értéke -4. (1 pont)
- c) A $g : x \mapsto -x - 1$ függvény helyes ábrázolása (ugyanabban a koordinátarendszerben) (2 pont)
 A metszéspontok első koordinátáinak leolvasása: $x_1 = -1$ $x_2 = 2$. (2 pont)
 A kapott értékek ellenőrzése behelyettesítéssel. (1 pont)



Összesen: 12 pont

56) Az ábrán egy, a $[0; 4]$ zárt intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltak közül a függvény hozzárendelési szabályát!



A: $x \mapsto (x - 2)^2 + 1$ B: $x \mapsto (x - 2)^2 - 1$ C: $x \mapsto (x + 2)^2 + 1$ D: $x \mapsto (x + 2)^2 - 1$

(2 pont)

Megoldás:

B: $x \mapsto (x - 2)^2 - 1$

(2 pont)

Összesen: 2 pont

57) Egy számtani sorozat negyedik tagja 4, tizenhatodik tagja -2 .

a) Számítsa ki a sorozat első 120 tagjának az összegét! (5 pont)

b) Adott egy szakasz két végpontja: $A(0; 4)$ és $B(2; 3)$. Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! (5 pont)

c) Egy elsőfokú függvény a 0-hoz 4-et, a 2-höz 3-at rendel. Írja fel a függvény hozzárendelési szabályát! (4 pont)

Megoldás:

a) Az összeg meghatározásához ki kell számolnunk a sorozat differenciáját. A negyedik és a tizenhatodik tag felírásával egy egyenletrendszert

kapunk:
$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 3d = 4 \\ a_1 + 15d = -2 \end{array} \right\} \quad (1 \text{ pont})$$

A második egyenletből kivonva az elsőt, megkapjuk, hogy $12d = -6 \Rightarrow d = -0,5$. (1 pont)

Visszahelyettesítve az első egyenletbe: $a_1 = 4 - 3 \cdot (-0,5) = 5,5$ (1 pont)

Az első 120 tag összege: $S_{120} = \frac{2 \cdot 5,5 + 119 \cdot (-0,5)}{2} \cdot 120 = -2910$ (2 pont)

b) Az AB szakasz felezőpontja: $F_{AB} = \left(\frac{0+2}{2}; \frac{4+3}{2} \right) = (1; 3,5)$ (2 pont)

A felezőmerőleges egyik normálvektora: $\underline{n}(2; -1)$ (1 pont)

Az egyenes normálvektoros egyenlete: $2x - y = -1,5$ (2 pont)

c) A hozzárendelési szabály legyen $x \mapsto mx + b$. (1 pont)

A függvény grafikonja egyenes, melynek meredeksége: $\left(\frac{3-4}{2-0}\right) = -0,5$ (2 pont)

A függvény az y tengelyt 4-nél metszi, így a hozzárendelési szabály:
 $x \mapsto -0,5x + 4$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

58) Hol metszi a koordinátatengelyeket az $x \mapsto -2x + 6$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény grafikonja? (2 pont)

Megoldás:

A függvény általános alakja $y = mx + b$, és az x tengelyt ott metszi, ahol a második koordináta 0, azaz az $-2x + 6 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, ahonnan $x = 3$. Az x tengelyt tehát a **(3;0)** pontban metszi a függvény.

(1 pont)

Az y tengelyt ott metszi a függvény, ahol az első koordináta 0, azaz az $y = -2 \cdot 0 + 6$ egyenletet kell megoldanunk, ahonnan $y = 6$. Az y tengelyt tehát a **(0;6)** pontban metszi a függvény.

(1 pont)

Összesen: 2 pont

59)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x}{x+2} = \frac{8}{(x+2)(x-2)} \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{x}{x+2} < 0 \quad (4 \text{ pont})$$

c) Határozza meg a valós számokon értelmezett $f(x) = x^2 - 6x + 5$ függvény minimumának helyét és értékét! (4 pont)

Megoldás:

a) Kikötés: a nevező miatt $x \neq -2$ és $x \neq 2$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát közös nevezőre hozva:

$$\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{8}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow x(x-2) = 8 \quad (2 \text{ pont})$$

0-ra rendezve az egyenletet: $x^2 - 2x - 8 = 0$ (1 pont)

Az egyenlet gyökei $x_1 = -2$ és $x_2 = 4$ (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az egyenlet értelmezési tartományán ekvivalenciára való hivatkozással: $x_1 = -2$ nem megoldás, $x_2 = 4$ megoldás.

(1 pont)

b) Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x > 0$ és $x+2 < 0$, vagy ha $x < 0$ és $x+2 > 0$. (2 pont)

Az első feltételnek megfelelő valós szám nincs, a második feltételből az egyenlőtlenség megoldása: **$-2 < x < 0$ ($x \in \mathbb{R}$)** (2 pont)

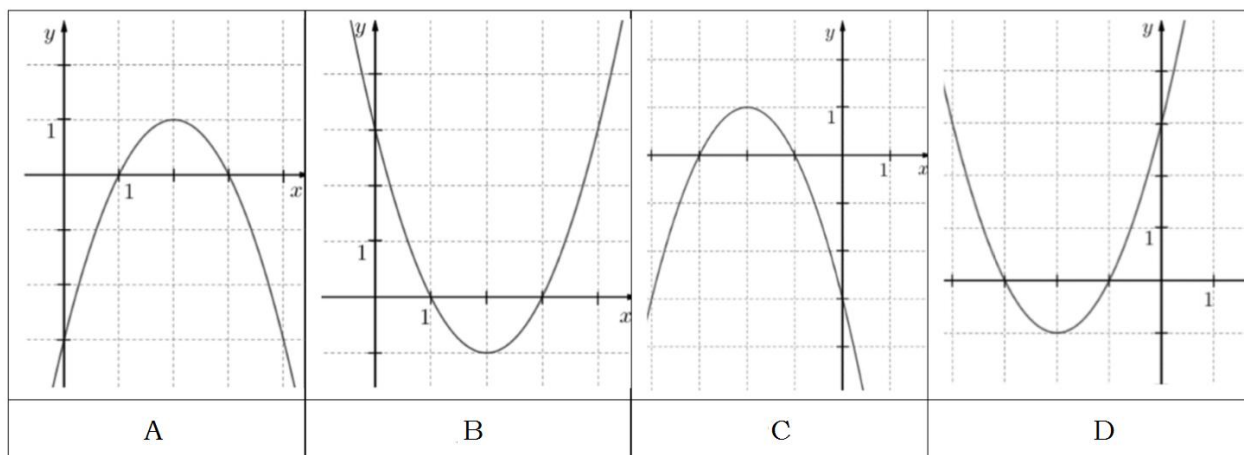
c) Teljes négyzetté alakítás: $f(x) = (x-3)^2 - 4$ (2 pont)

Innen leolvasható a parabola minimumának helye és értéke, tehát **$x = 3$ és $y = -4$** . (2 pont)

Összesen: 14 pont

60) Adott az $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$ függvény.

- a) Írja fel két elsőfokú tényező szorzataként az $x^2 + 4x + 3$ kifejezést! (2 pont)
- b) A $P(-6,5; y)$ pont illeszkedik az f grafikonjára. Számítsa ki y értékét! (2 pont)
- c) Az alábbi grafikonok közül válassza ki az f függvény grafikonját (karikázza be a megfelelő betűt), és határozza meg az f értékkészletét! (3 pont)



Adott a $g : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 6x + 5$ függvény. Az a három pont, ahol a g grafikonja metszi a koordinátatengelyeket, egy háromszöget határoz meg.

- d) Határozza meg ennek a háromszögnek a területét! (7 pont)

Megoldás:

a) $x^2 + x + 3x + 3 = x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3)$ (2 pont)

b) A $-6,5$ -öt behelyettesítve az egyenes egyenletébe megkapjuk az y értékét: $y = (-6,5)^2 + 4 \cdot (-6,5) + 3 = 19,25$ (2 pont)

c) Mivel x^2 együtthatója pozitív, az f függvény grafikonja konvex lesz. A kifejezést teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy $x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$. Ebből tudjuk, hogy a függvény grafikonja az x tengelyt -2 -nél, az y tengelyt pedig -1 -nél fogja metszeni. Ezért az f függvény grafikonja a **D**. (1 pont)

A függvény minimumértéke a -1 -nél van, felülről pedig nem korlátos, így az f függvény értékkészlete: $\mathbf{R} : y \in [-1; \infty[$. (2 pont)

d) A g értéke 0 -ban 5 , így az y tengelyt az $A(0; 5)$ pontban metszi a g grafikonja. (2 pont)

Az $x^2 - 6x + 5$ egyenlet megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$. (2 pont)

Ezért az x tengelyt a g függvény grafikonja a $B(1;0)$ és a $(5;0)$ pontokban metszi. (1 pont)

Az ABC háromszög (BC oldala 4 egység, a hozzá tartozó magasság 5 egység hosszú, így) területe $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ (területegység). (2 pont)

Összesen: 14 pont

61) Válassza ki az alább felsorolt, a valós számok halmazán értelmezett függvények közül a páros függvényeket!

A) $a(x) = 3x^2$ B) $b(x) = x^3$ C) $c(x) = |x|$ D) $d(x) = 4x + 2$ (2 pont)

Megoldás:

Páros függvény az, amelyre igaz, hogy $f(x) = f(-x)$.

$$3x^2 = 3(-x)^2 \quad x^3 \neq (-x)^3 \quad |x| = |-x| \quad 4x + 2 \neq 4(-x) + 2$$

Tehát páros függvény az **A)** és a **C)**.

(2 pont)

Összesen: 2 pont

62) Adott a $[-2; 4]$ zárt intervallumon értelmezett f függvény: $x \mapsto -\frac{1}{2}x + 4$.

a) Mit rendel az f függvény az $x = -\frac{3}{4}$ számhoz? (2 pont)

b) Ábrázolja az f grafikonját! Adja meg az f értékkészletét! (5 pont)

Adott a valós számok halmazán értelmezett g függvény: $x \mapsto x^2 - 4x + 3$.

c) Hány olyan szám van, amelyhez a g függvény a $\left(-\frac{3}{4}\right)$ értéket rendel? **(4 pont)**

Megoldás:

a) $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 4 = \frac{3}{8} + 4 = 4,375$ (2 pont)

b) A függvény:

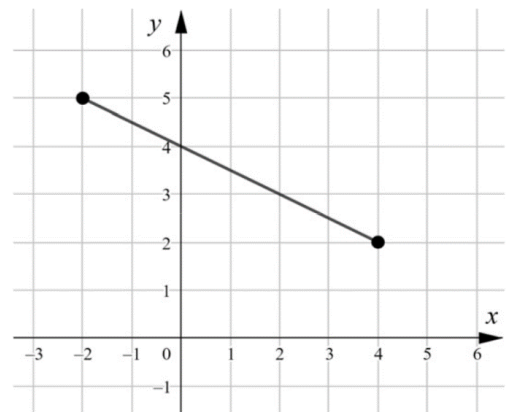
- meredeksége $-\frac{1}{2}$

- 4-nél metszi az y tengelyt

- a $[-2; 4]$ van értelmezve

A legkisebb érték, amit a függvény felvesz 2, a legnagyobb pedig 5, így az értékkészlet

$R : y \in [2; 5]$.



c) A megoldandó egyenlet:

$$x^2 - 4x + 3 = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^2 - 4x + 3,75 = 0. \quad (1 \text{ pont})$$

Az egyenlet gyökei: $x_1 = 1,5$ és $x_2 = 2,5$. (2 pont)

Tehát **két** olyan szám van, amihez a g függvény a $\left(-\frac{3}{4}\right)$ értéket rendel.

(1 pont)

Összesen: 11 pont