Halmazok, intervallumok

Alapfogalmak (nem definiált fogalmak):
Halmaz, elem, eleme. Jelölés: $x \in A$ (ejtsd: az x eleme az A halmaznak).

Halmaz megadása:
A vizsgálatok során mindig feltesszük, hogy a figyelembe vett elemek egy adott U alaphalmaznak (univerzumnak) az elemei. Akkor mondjuk, hogy megadtunk egy halmazt, ha az alaphalmaz minden eleméről el tudjuk dönteni, hogy eleme - e a halmaznak, vagy sem.

Halmazok megadásának módszerei:

- Körülírással: $A = \{5 - tel\ osztva\ 3\ maradékot\ adó, 1\ \text{és}\ 40\ közötti\ számok\}$
- Elemek felsorolásával: $C = \{3; 8; 13; 18; 23; 28; 33; 38\}$
- Utasítással: $B = \{5x + 3 \mid 0 \leq x < 8; x \in \mathbb{N}\}$

Megjegyzés:
Felsorolásnál az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel.

Halmazok szemléltetése:
A halmazok egymáshoz való viszonyát halmazábrával (Venn – diagrammal) szemléltetjük.

DEFINÍCIÓ: (Egyenlő halmazok)
Két halmazt egyenlőnek nevezünk, ha ugyanazok az elemeik. Jelölés: $A = B$.

DEFINÍCIÓ: (Üres halmaz)
Azt a halmazt, melynek nincs egyetlen eleme sem, üres halmaznak nevezzük. Jelölés: $\emptyset; \{\quad\}$.

Megjegyzés:
A $\{\emptyset\}$ jelölés nem megfelelő, mert ez egy olyan halmaz, melynek eleme az üreshalmaz.

DEFINÍCIÓ: (Részhalmaz)
Egy B halmaz részhalmaza egy A halmaznak, ha a B halmaz minden eleme beletartozik az A halmazba. Jelölés: $B \subseteq A$.

Megjegyzés:

- *Minden halmaz részhalmaza önmagának. Jelöléssel:* $A \subseteq A$.
- *Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza. Jelöléssel:* $\emptyset \subseteq A$.

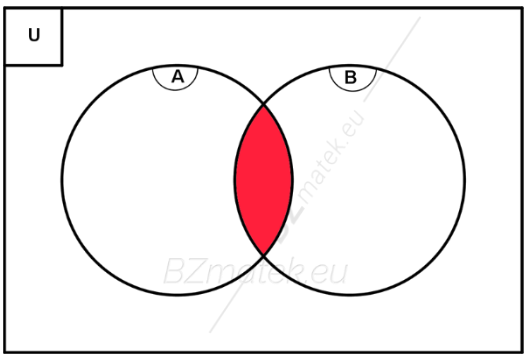
DEFINÍCIÓ: (Valódi részhalmaz)
Egy B halmaz valódi részhalmaza az A halmaznak, ha a B halmaz minden eleme beletartozik az A-ba, de az A-nak van olyan eleme, amely nem tartozik bele a B halmazba. Jelölés: $B \subset A$.

DEFINÍCIÓ: (Hatványhalmaz)
Egy A halmaz összes részhalmazainak a halmazát hatványhalmaznak nevezzük. Jelölés: $\mathcal{P}\,(A)$.

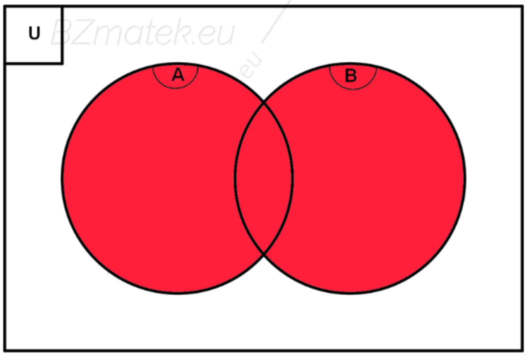
TÉTEL:
Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak a száma: 2^n.

Halmazműveletek:

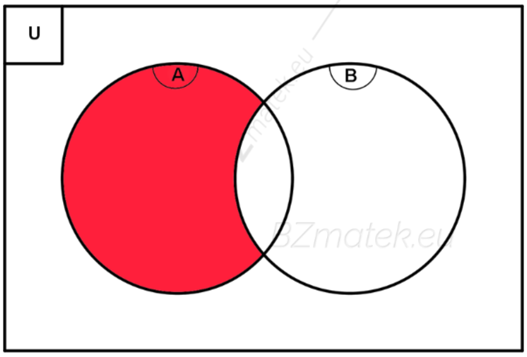
DEFINÍCIÓ: (Metszet)
Az A és B halmaz metszete (közös része) azon elemeknek a halmaza, melyek mind a két halmazba beletartoznak. Jelölés: $A \cap B$.



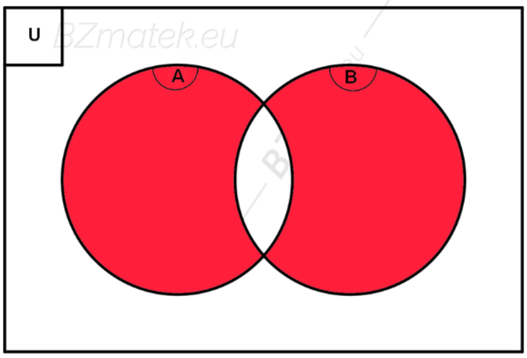
DEFINÍCIÓ: (Unió)
Az A és B halmaz uniója (egyesítettje) azon elemek halmaza, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikbe beletartoznak. Jelölés: $A \cup B$.



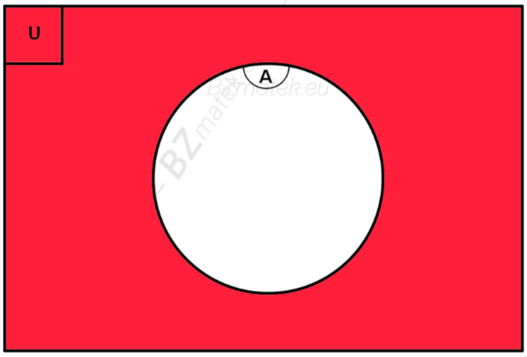
DEFINÍCIÓ: (Különbség)
Az A és B halmaz különbsége azon elemek halmaza, amelyek beletartoznak az A halmazba, de nem elemei a B halmaznak. Jelölés: $A \setminus B$.



DEFINÍCIÓ: (Szimmetrikus különbség)
Az A és B halmaz szimmetrikus különbsége azon elemeknek a halmaza, amelyek a két halmaz közül pontosan az egyikbe tartoznak bele. Jelölés: $A \Delta B$.



DEFINÍCIÓ: (Komplementer halmaz)
Az A halmaz komplementere (kiegészítő halmaza) azon elemek halmaza, melyek elemei az alaphalmaznak, de nem elemei az A halmaznak. Jelölés: $\overline{A}$.



Megjegyzés:
A komplementer képzés nem értelmezhető az alaphalmaz ismerete nélkül.

Halmazműveleti tulajdonságok:

- Idempotencia (azonos hatványúság): Egy tetszőleges halmaz önmagával való metszetének, illetve uniójának eredménye önmaga a halmaz. Jelöléssel: $A \cap A = A; A \cup A = A$.
- Kommutativitás (felcserélhetőség): Egy tetszőleges A és B halmaz metszetében, uniójában, illetve szimmetrikus különbségében a két halmaz felcserélhető. Jelöléssel: $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$.
- Asszociativitás (csoportosíthatóság, társíthatóság): Bármilyen A, B és C halmaz metszete, uniója, illetve szimmetrikus különbsége tetszőlegesen átzárójelezhető és a zárójel el is hagyható. Jelöléssel: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.
- Disztributivitás (széttagolhatóság): A halmazok metszete disztributív az unióra nézve, az uniója disztributív a metszetre nézve. Jelöléssel: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Adjunktivitás (elnyelési tulajdonság): $A \cap (A \cup B) = A$ és $A \cup (A \cap B) = A$.
- Komplementerre vonatkozó azonosság: $\overline{\overline{A}} = A; A \cup \overline{A} = U; A \cap \overline{A} = \emptyset$.
- De Morgan - azonosságok: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ és $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

DEFINÍCIÓ: (Diszjunkt halmazok)
Két halmazt diszjunktnak nevezünk, ha nincs közös elemük, azaz metszetük az üres halmaz.

<u>Számfogalmak kialakítása, nevezetes számhalmazok:</u>
Azt mondjuk, hogy ha egy halmazbeli művelet eredménye nem vezet ki a halmazból (tehát a művelet eredménye szintén eleme a kérdéses halmaznak), akkor e halmaz erre a műveletre nézve zárt halmaz. Ha a művelet eredménye már egy másik (általában bővebb) halmazba is tartozhat, akkor azt mondjuk, hogy e halmaz erre a műveletre nézve nyílt halmaz.

- A tárgyak megszámlálására a $0; 1; 2; \ldots$ számokat használjuk, s ezek alkotják a természetes számok halmazát. Jele: $\mathbb{N}$.

- A természetes számok halmazából az összeadás és szorzás művelete nem vezet ki (az eredmény is természetes szám lesz), viszont a kivonás igen, ezért szükség van a természetes számok ellentettjeire is. Ezek a számok együttvéve $(\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \ldots)$ alkotják az egész számok halmazát. Jele: $\mathbb{Z}$.

- Az egész számok halmazából az összeadás, kivonás és szorzás nem vezet ki, viszont az osztás igen. Ebből a célból az egész számok halmazát újabb tört számokkal bővítve, megkapjuk a racionális számok halmazát. Jele: $\mathbb{Q}$.

- A racionális számok halmazából az összeadás, kivonás, szorzás és osztás nem vezet ki, viszont a négyzetgyökvonás igen. Ebből a célból a racionális számok halmazát az irracionális számok halmazával bővítve, megkapjuk a valós számok halmazát. Jele: $\mathbb{R}$.

<u>Megjegyzés:</u>

- *A számfogalmak kialakításánál megjelenik a permanencia – elv: Valamely számhalmazon érvényes tulajdonságtól azt kívánjuk, hogy az érvényes legyen egy bővebb számhalmazon is.*

- *A racionális és valós számok halmaza zárt a négy alapműveletre nézve.*

- *Az irracionális számok halmaza nyílt az alapműveletekre nézve: a műveletek eredménye lehet racionális szám is.*

- *Egy 0 – tól különböző racionális és egy irracionális szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa is irracionális szám lesz.*

- *A valós számok halmazát tovább bővíthetjük úgy, hogy negatív számokból is tudjunk négyzetgyököt vonni. Így megkapjuk a komplex számok halmazát. Jele: $\mathbb{C}$.*

DEFINÍCIÓ: (Egész számok)
Egész számoknak nevezzük az olyan számokat, amelyek felírhatók két természetes szám különbségeként.

DEFINÍCIÓ: (Racionális számok)
Azokat a számokat, amelyek felírhatóak két egész szám hányadosaként (tört alakban), racionális számoknak nevezzük.

Megjegyzés:

- *A racionális számok felírhatók vegyestört alakban és tizedestört alakban is. Pl.:* $2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$
- *Véges tizedes tört: A tört alak úgy egyszerűsíthető, illetve bővíthető, hogy nevezője* 10*-nek valamilyen hatványa legyen. Pl.:* $5{,}6=\frac{56}{10}$ $\quad 14{,}592=\frac{14592}{1000}$ $\quad 0{,}0703=\frac{703}{10000}$
- *Végtelen szakaszos tizedestört: A tizedes vessző után álló számjegyek egy szakasza újra és újra ismétlődik. Pl.:* $1{,}0\dot{3}\dot{6}=1{,}0363636\ldots$ $\quad 2{,}\dot{5}=2{,}555\ldots$ $\quad 3{,}\dot{1}8\dot{9}=3{,}189189\ldots$
- *Bármely két racionális szám között van újabb racionális szám.*
- *Az egész számok is felírhatók törtalakban.*

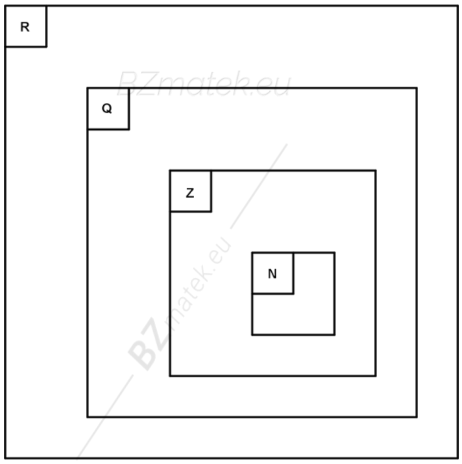
DEFINÍCIÓ: (Irracionális számok)
Az olyan tizedestörtet, amely nem véges és nem végtelen szakaszos, irracionális számnak nevezzük. Pl.: $\sqrt{2}$; π.

Megjegyzés:

- *Irracionális számok esetében a tizedesvessző utáni számjegyek ismétlődésében nincs szabályosság.*
- *Az irracionális számok nem írhatók fel két egész szám hányadosaként (tört alakban).*
- *Az irracionális számok esetében közelítő értékkel számolunk.*

DEFINÍCIÓ: (Valós számok)
A racionális és irracionális számok halmazának uniója együtt alkotják a valós számokat.

Megjegyzés:
A valós számok halmazának elemei és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hozhatunk létre, így a valós számokat szemléltethetjük a számegyenes pontjaival.



A számhalmazok kapcsolata: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Halmazok számossága:
Egy A halmaz számosságán az elemeinek a számát értjük. Jelölés: $|A|$.

TÉTEL: (Logikai – szita formula)
Tetszőleges A, B, illetve C halmazok esetén az összes elemeiknek a száma:

- 2 halmazra: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 3 halmazra: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Megjegyzés:
A szita – formula több halmaz esetén is felírható az előző képletekhez hasonlóan.

DEFINÍCIÓ: (Egyenlő számosságú halmazok)
Ha két halmaz között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, akkor azt mondjuk, hogy a két halmaz számossága egyenlő (a két halmaz ekvivalens egymással).

DEFINÍCIÓ: (Véges, végtelen halmazok)
Egy halmazt végesnek nevezünk, ha nincs olyan valódi részhalmaza, amely vele egyenlő számosságú. Ellenkező esetben végtelen halmazról beszélünk.

Megjegyzés:
A véges halmaz számossága kifejezhető egy természetes számmal.

DEFINÍCIÓ: (Megszámlálhatóan végtelen halmazok)
Egy halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha egyenlő számosságú a természetes számok halmazával. Jele: $\aleph_0$ (alefnull).

<u>*Megjegyzés:*</u>

- *Az alefnull számosság a legkisebb végtelen számosság.*
- *Az alefnull számosságú halmazok elemi sorba rendezhetőek.*

DEFINÍCIÓ: (Megszámlálható halmazok)
Egy halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

TÉTEL:
Megszámlálható halmaz részhalmaza is megszámlálható.

TÉTEL:
Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

TÉTEL:
A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

TÉTEL:
A valós számok halmaza nem megszámlálhatóan végtelen.

DEFINÍCIÓ: (Kontinuum számosság)
A valós számok halmazával egyenlő számosságú halmazokat kontinuum számosságúnak nevezzük.

<u>*Megjegyzés:*</u>

- *Példa: sík (tér) pontjai, irracionális számok halmaza, számegyenes egy intervalluma, …*
- *A valós számok halmazát számegyenes segítségével szemléltetjük.*
- *A racionális számok nem töltik ki teljesen a számegyenest, mert bármely két racionális szám között található újabb racionális szám.*

TÉTEL:
Egy kontinuum végtelen számosságú halmaz számossága nagyobb, mint egy megszámlálhatóan végtelen számosságúé.

TÉTEL:
Bármely két nem 0 hosszú szakasz pontjainak számossága egyenlő (kontinuum számosságú).

DEFINÍCIÓ: (Halmazok Descartes - szorzata)
Az A és B halmaz Descartes - szorzatán (direkt szorzatán) azon rendezett elempárok halmazát értjük, amelyeknek első eleme az A, második eleme a B halmazból való. Jelölés: $A \times B$ (ejtsd: A kereszt B).

Megjegyzés:
Rendezettség alatt azt értjük, hogy az elempárok nem felcserélhetők.

TÉTEL:
Az összes rendezett természetes számpár halmaza megszámlálhatóan végtelen.

Intervallumok:
A számegyenes egy szakaszát intervallumnak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Zárt intervallum)
Zárt intervallumnak nevezzük azt az intervallumot, amelynél a határoló elemek beletartoznak az intervallumba. Jelöléssel: $x \in [a; b]$, ha $a \leq x \leq b$.

DEFINÍCIÓ: (Nyílt intervallum)
Nyílt intervallumnak nevezzük azt az intervallumot, amelynél a határoló elemek nem tartoznak bele az intervallumba. Jelöléssel: $x \in]a; b[$, ha $a < x < b$.

DEFINÍCIÓ: (Félig nyílt – félig zárt intervallum)
Félig nyílt – félig zárt intervallumnak nevezzük azt az intervallumot, amelynél az egyik határoló elem beletartozik, a másik határoló elem pedig nem tartozik bele az intervallumba. Jelöléssel: $x \in]a; b]$, ha $a < x \leq b$, illetve $x \in [a; b[$, ha $a \leq x < b$.

Megjegyzés:

- *Az intervallumok esetében a végteleneket nyílt intervallumokkal jelöljük:* $]-\infty;\ +\infty[$.
- *A zárt intervallum határpontjait besatírozott, a nyíltét pedig üres karikákkal ábrázoljuk.*

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat E: emelt szintű feladat

1. **(K) Melyik határoz meg halmazt az alábbiak közül?**

   A: József Attila hosszú versei

   B: az első tíz prímszám

   C: néhány darab páros szám

   D: az osztály legokosabb tanulója

   E: Debrecen általános iskolái

   F: a jövő heti hatos lottó nyerőszámai

2. **(K) Add meg a következő halmazokat körülírással, majd elemeik felsorolásával!**

   $A = \{x^2 = 9 | x \in \mathbb{Z}\}$

   $B = \{|x| < 4 | x \in \mathbb{N}\}$

   $C = \{x \mid 7 | x \in \mathbb{Z}\}$

   $D = \{2x - 1 | -2 < x \leq 3; x \in \mathbb{Z}\}$

3. **(K) Adj meg három különböző, végtelen halmazt úgy, hogy bármely kettő metszete üres, végtelen, illetve véges legyen!**

4. **(K) Adj meg három kételemű halmazt úgy, hogy bármely kettőnek legyen véges sok közös eleme, de a három halmaz közös része üres legyen!**

5. **(K) Adj meg három halmazt úgy, hogy bármely kettőnek legyen végtelen sok közös eleme, de a három halmaz közös része üres legyen!**

6. **(K) Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak, vagy hamisak!**

   $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ $\quad \emptyset \subseteq \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$ $\quad Z \subset \emptyset$ $\quad Q \cup \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ $\quad N \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$

7. **(K) Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak, vagy hamisak!**

   $-2 \in \mathbb{N}$ $\quad -3 \in \mathbb{Z}$ $\quad \frac{1}{5} \in \mathbb{Z}$ $\quad -\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad 1,37 \in \overline{\mathbb{Q}}$ $\quad 0 \in \mathbb{Q}$

   $2,\dot{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad 4,\dot{5}6\dot{7} \in \overline{\mathbb{Q}}$ $\quad -\pi \in \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{3} \in \overline{\mathbb{Q}}$ $\quad 1\frac{5}{8} \in \mathbb{R}$ $\quad 2\pi \in \mathbb{R}$

8. (K) Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak, vagy hamisak!

$A = \{négyzetek\}$ $B = \{deltoidok\}$ $C = \{trapézok\}$ $D = \{paralelogrammák\}$

$A \subseteq B$ $D \subset C$ $B \subseteq D$ $C \subset A$ $B \subseteq \emptyset$ $D \subset D$ $\emptyset \subset C$ $A \subseteq A$

9. (K) Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak, vagy hamisak!

A: Ha $X \subseteq Y$, akkor $X \setminus Y = \emptyset$.

B: Ha $X \subset Y$, akkor $Y \setminus X = \emptyset$.

C: Ha $Y \subseteq X$, akkor $|Y| < |X|$.

D: Ha $X \cup Y = X \cap Y$, akkor $X \subset Y$.

10. (K) Sorold fel az $A = \{1; 2; 3; 4\}$ halmaz részhalmazait, illetve valódi részhalmazait!

11. (K) Hány elemű lehet az a halmaz, amelynek eggyel, kettővel, illetve hárommal több részhalmaza van, mint ahány eleme?

12. (K) Hány részhalmaza van a 200 – nál kisebb négyzetszámok halmazának?

13. (K) Hány elemű az a halmaz, amelynek legalább ezerrel több részhalmaza van, mint amennyi eleme?

14. (K) Egy 8 elemű halmaznak melyikből van több: 3 elemű, vagy 5 elemű részhalmazaiból?

15. (E) Legyen az A a 100 - nál kisebb pozitív egész számok halmaza. Hány elemű az A összes részhalmazának az uniója?

16. (E) Egy zsákban n darab különböző kis golyó van. Hányféleképpen vehetünk ki valamennyi golyót a zsákból, ha a kivétel belemarkolással történik és lehet, hogy egy golyót sem húzunk ki?

17. (E) Hány olyan részhalmaza van az $A = \{a; b; c; d; e\}$ halmaznak, amelynek a c eleme?

18. (E) Hány olyan részhalmaza van az $A = \{a; b; c; d; e\}$ halmaznak, amelynek a b és a c közül legalább az egyik eleme?

19. (E) Legfeljebb hány részhalmazát választhatjuk ki egy 10 elemű halmaznak úgy, hogy semelyik két kiválasztott részhalmaz ne legyen diszjunkt?

20. (E) Bizonyítsd be, hogy egy n elemű halmaz páros és páratlan elemszámú részhalmazainak száma egyenlő! (Az üres halmaz elemszáma páros.)

21. (K) Döntsd el, hogy igazak – e az alábbi kijelentések tetszőleges A és B halmazokra!

A: Ha $a \notin A$ és $a \in B$, akkor $a \in (A \cap B)$.

B: Ha $a \notin A$ és $a \in B$, akkor $a \in (B \setminus A)$.

C: Ha $a \in A$ és $a \in B$, akkor $a \in (A \cup B)$.

D: Ha $a \in A$ és $a \in B$, akkor $a \in (A \setminus B)$.

E: Ha $a \in A$ és $a \notin B$, akkor $a \in (A \,\Delta\, B)$.

F: Ha $a \in (A \cup B)$, akkor $a \in A$, vagy $a \in B$.

G: Ha $a \in (A \cap B)$, akkor $a \in A$ és $a \in B$.

H: Ha $a \notin (A \cup B)$, akkor $a \notin A$ és $a \notin B$.

I: Ha $a \notin (A \cap B)$, akkor $a \notin A$ és $a \notin B$.

J: Ha $a \notin (A \,\Delta\, B)$, akkor $a \notin A$ és $a \in B$.

22. (K) Tekintsd az $U = \{0; 1; 2; 3; 6; 8; 10; 11; 12\}$ alaphalmazon a következő halmazokat: $A = \{10 - nél\ nem\ nagyobb, páros\ számok\}$, $B = \{3x | x \in]0; 10]\}$. Add meg a következő halmazműveletek eredményét!

$B \setminus A$ $\quad$ $A \cup B$ $\quad$ $B \cap A$ $\quad$ $A \,\Delta\, B$ $\quad$ $\overline{A}$ $\quad$ $\overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \,\Delta\, B}$ $\quad$ $A \cup \overline{B}$

23. (K) Adottak a következő halmazok: $A = \{1; 2; 4; 6\}$, $B = \{1; 6; 7; 8; 9\}$, $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Az alaphalmaz: $U = \{1; 2; \dots; 9; 10\}$. Határozd meg a következő halmazokat!

$A \cap C$ $\quad$ $B \,\Delta\, C$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ $\overline{A}$ $\quad$ $C \,\Delta\, (B \setminus A)$ $\quad$ $B \cup C \,\Delta\, A$ $\quad$ $\overline{A} \cap B$ $\quad$ $\overline{B \cup C}$

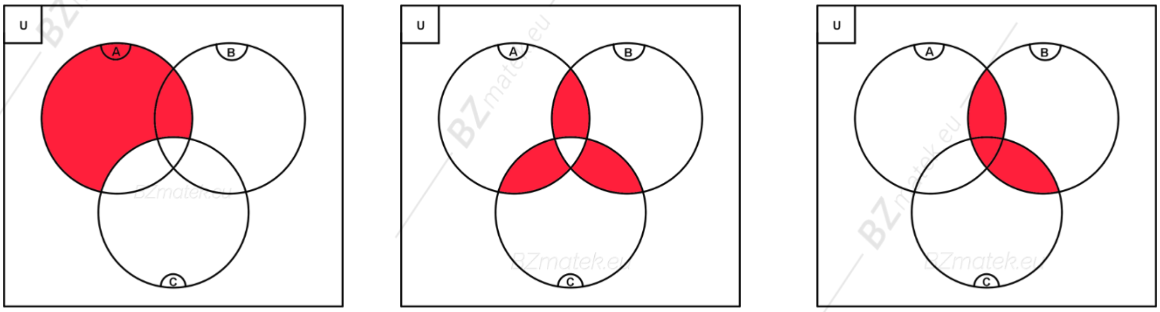
24. (K) Add meg az A és B halmaz elemeit, ha tudjuk, hogy $A \cap B = \{1; 2; 3\}$, $\overline{B} = \{4; 5; 6; 7\}$, $B \cup A = \{1; 2; 3; 4; 5; 8; 9\}$ és az alaphalmaz: $U = \{1; 2; \dots; 8; 9\}$!

25. (K) Az $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaz A, B és C részhalmazairól az alábbiakat tudjuk: $A \cap B = \{2\}$; $(A \cup B) \cap C = \{5; 6\}$; $A \setminus C = \{2; 3; 4\}$; $C \setminus B = \{1; 5\}$. Határozd meg az A, B és C halmazokat!

26. (E) Az A, B, C halmazokról a következőket tudjuk: $A \cup B \cup C = \{1; 2; \dots; 10; 11\}$; $A \setminus C = \{2; 7\}$; $A \cap B = \{2; 11\}$; $(B \cap C) \setminus A = \{3; 4\}$; $(B \cup C) \setminus A = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$. Add meg az A, B, C halmazok elemeit, ha tudjuk, hogy a B halmaznak csak két páratlan eleme van!

27. (K) Határozd meg az A és B halmazokat, ha $A \cup B = \{1;2;3;4;5\}$; $A \cap B \not\subset \{3;4;5\}$; $A \setminus B = \{1;4\}$; $|A| = |B|$!

28. (K) Add meg halmazműveletekkel az ábra besatírozott területeit!



29. (K) Adott az A, B és C halmazok. Írd fel halmazműveleti jelek segítségével azon elemek halmazát, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei, de ha elemei B – nek, akkor nem elemei A – nak!

30. (K) Legyen $|A| = 8, |B| = 11$. Mekkorák lehetnek az alábbi értékek?

$|A \cap B|$ $\quad$ $|A \cup B|$ $\quad$ $|A \setminus B|$ $\quad$ $|B \setminus A|$

31. (E) Bizonyítsd be, hogy A, B véges halmazok esetén: $|A \,\Delta\, B| = |A| + |B| - 2 \cdot |A \cap B|$!

32. (K) Tudjuk, hogy $|U| = 20$, $|A| = 8$, $|B| = 7$, $|C| = 7$, $|A \cap B \cap C| = 2$, $|B \setminus C| = 4$, $|A \setminus B| = 5$, $|C \setminus A| = 3$, $|A \cap B| = 3$. Határozd meg a következő halmazműveletek elemszámát: $|A \setminus C|$, $|B \cap C|$, $|\overline{C}|$!

33. (K) Hány eleműek az A, B és C halmazok, ha $|A \cup B \cup C| = 10, |A \cup B| = 8$, $|A \setminus B| = 3, |A \cap B| = 3, |A \cap B \cap C| = 2, |A \cap C| = 3$ és $|B \setminus C| = 2$?

34. (E) Az A, B és C halmazokról tudjuk, hogy $|A \setminus B| = 5, |B \setminus C| = 5, |C \setminus A| = 4$, $|A \cap B \cap C| = 1, |A \cup B| = 13, |A \cup C| = 12$ és $|C| = 7$. Határozd meg az A és B halmazok elemszámát!

35. (E) Legyen A, B és C olyan halmazok, melyekre $A \cap C = B \cap C$ és $A \setminus C = B \setminus C$. Bizonyítsd be, hogy $A = B$!

36. (E) Legyen A, B és C olyan halmazok, melyekre $A \cup C = B \cup C$ és $C \setminus A = C \setminus B$. Bizonyítsd be, hogy $A = B$!

37. (K) Hány olyan egész szám van 1 - től 300 - ig, amely osztható 4 – gyel, vagy 6 – tal?

38. (K) Hány olyan 400 - nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely nem osztható 3 - mal, 5 - tel és 7 - tel sem?

39. (K) Az 1000 – nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amelyik

a) **a 2 és 3 közül legalább az egyikkel osztható**

b) **a 2 és 3 közül legfeljebb az egyikkel osztható**

c) **a 2 és 3 közül pontosan az egyikkel osztható**

d) **ha osztható 2 – vel, akkor osztható 3 – mal is**

e) **a 2 és 3 közül ha osztható az egyikkel, akor osztható a másikkal is?**

40. (K) Az 1000 – nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amelyik

a) **a $2, 3, 5$ számok közül pontosan a 2 – vel osztható**

b) **a $2, 3, 5$ számok közül pontosan kettővel osztható?**

41. (K) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyik

a) **osztható 3 – mal, vagy 4 – gyel, de nem osztható 5 – tel?**

b) **osztható 3 – mal és 5 – tel, de nem osztható 4 – gyel?**

42. (K) Egy osztály 28 tanulója közül 8 – an felvételiznek matematikából, 6 – an fizikából, 4 tanuló matematikából is és fizikából is. Hányan nem felvételiznek egyik említett tárgyból sem?

43. (K) Tudjuk, hogy egy 28 fős osztályban nincs jelese 23 tanulónak fizikából és 21 tanulónak matematikából. Hány tanulónak van matematikából és fizikából is jeles osztályzata, ha tudjuk, hogy matematikából vagy fizikából 10 – en kaptak jelest?

44. (K) Egy 20 fős csoportban 14 – en beszélnek angolul, s 9 – en németül. Hányan beszélnek mindkét nyelven, ha tudjuk, hogy a csoportban nincs olyan, aki ne beszélné legalább az egyik nyelvet?

45. (K) Egy matematikaversenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot az indulók $70\,\%$ - a, a másodikat pedig az indulók $60\,\%$ - a oldotta meg. Minden induló megoldott legalább egy feladatot, és 9 – en mindkét feladatot megoldották. Hányan indultak a versenyen?

46. (E) Egy osztály tanulóinak az $50\,\%$ - a közepesnél nem jobb, míg a $\frac{4}{5}$ – része közepesnél nem rosszabb dolgozatot írt. Hányan járnak az osztályba, ha a dolgozatírásnál senki sem hiányzott, és közepesnél rosszabb dolgozatot 6 – an írtak? Mennyi volt a közepes?

47. (E) Egy ornitológus megfigyelte, hogy a területén élő 200 szarka $60\,\%$ - ának a farka tarka, $70\,\%$ - ának hosszú a csőre. A tarka farkú és hosszú csőrű szarkák aránya az összes szarkához viszonyítva $40\,\%$. Hány egyed van, amelyiknek rövid csőréhez egyszínű faroktollazat tartozik?

48. (E) Egy gimnázium kémia – biológia tagozatos osztályába 76 tanuló felvételizett. A felvételizők közül volt, aki csak a kémia, és volt, aki csak a biológia tagozatot jelölte meg, de 29 – en mindkét tagozatra beadták a jelentkezési lapjukat. Bizonyítsd be, hogy a két tagozatra nem jelentkezhetett ugyanannyi diák!

49. (E) Egy osztály létszáma 30. Az osztályban három nyelvet tanulnak, angolt, oroszt és franciát, és minden diák legalább egy nyelvet tanul. Angolul 14 – en tanulnak, oroszul 15 – en, franciául pedig 5 – en. Pontosan két nyelvet összesen 6 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

50. (K) Egy osztály tanulói 3 feladatból álló dolgozatot írtak matematikából. Az első feladatot 14 – en, a másodikat 13 – an, a harmadikat pedig 11 – en oldották meg. 7 tanuló az első és második, 6 a második és harmadik, és 4 gyerek az első és harmadik példát is megoldotta. Mindössze 4 diák tudta mindhárom feladatot elkészíteni. Hányan vannak az osztályban, ha mindenki legalább egy feladatot megoldott?

51. (K) A 35 fős $9.E$. osztály az osztálykiránduláson, amelyre mind a 35 tanuló elment, salátát rendelt vacsorára. A vacsora végén kiderült, hogy háromfélét ettek: gyümölcssalátát, kukoricasalátát, tonhalsalátát, és mindenki rendelt valamilyet a három közül. Kukoricasalátát 14 - en, gyümölcssalátát 15 - en, tonhalsalátát 13 - an. Egy diák rendelt mindháromból. A kukoricasalátát rendelők közül 11 - en nem kértek gyümölcssalátát. 9 olyan diák volt, aki sem kukoricás, sem gyümölcssalátát nem evett. A csak gyümölcssaláták rendelők 1 - gyel többen voltak, mint a csak tonhalasat rendelők.

***a)* Hány olyan tanuló volt, aki tonhalas és gyümölcssalátát is rendelt?**

***b)* Hány olyan tanuló volt, aki csak kukoricás salátát rendelt?**

52. (K) Egy 36 főből álló csoporttal teszteltek három terméket, legyenek ezek: A, B és C. 20 főnek tetszett az A és a C termék, 8-nak a B és a C termék. Csak az A, illetve csak a B termék $2-2$ tesztelőnek felelt meg. Az A vagy a B terméket viszont 29 - en tartották jónak. A C termék szintén 29 embernek felelt meg. Mindhárom termék csupán 3 embernek tetszett.

a) **Hány tesztelőnek tetszett pontosan két termék?**

b) **Hozzájuk képest többen vagy kevesebben voltak, akiknek csak egy termék volt jó?**

c) **Mennyien vannak azok, akiknek egyetlen termék sem volt megfelelő?**

53. (E) Egy matematikai versenyen három feladatot tűztek ki. A 184 versenyző közül mindenki megoldott legalább egy feladatot. Az első példát 90, a másodikat 80, a harmadikat 50 induló oldotta meg helyesen, pontosan két jó feladatmegoldása 32 diáknak volt.

a) **Hány olyan versenyző volt, aki az első feladatot nem oldotta meg?**

b) **Hány olyan versenyző volt, aki mindhárom feladatot megoldotta?**

c) **Ha azt is tudjuk, hogy 60 olyan diák volt, aki csak az első, és 50 olyan diák volt, aki csak a második feladatot oldotta meg, akkor hányan voltak azok, akik csak a harmadik feladatott oldották meg?**

54. (E) Határozd meg az $A \times B$, a $C \times B$ és a $C \times C$ halmazokat, ha $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{1; 4; 5\}$ és $C = \{2; 7\}$! Mennyi eleme van az $A \times A$, a $B \times A$ és az $A \times C$ halmazoknak?

55. (E) Legyen az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon értelmezve a következő ponthalmaz: $P = \{origó\ középpontú, 5\ sugarú\ zárt\ körlap\}$. Hány elemű a $P \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ halmaz? Mennyi az eleme, ha a körlap nyílt?

56. (K) Ábrázold számegyenesen a következő számhalmazokat!

$A = \{x \mid -5 < x \leq 3; x \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad$ $B = \{2x+3 \mid -2 \leq x \leq 1; x \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{3x-2 \mid -1 \leq x < 2; x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad$ $D = \{x \mid 2 > |x|; x \in \mathbb{R}\}$

Igaz – e, hogy a $B \setminus A$ halmaz elemeinek a száma véges?

57. (K) Tekintsük a következő intervallumokat: $A = [1; 3[$, $B =]-1; 2]$, $C = [0; +\infty[$, $D =]-\infty; 4[$. Határozd meg a következő intervallumokat: $C \cup D$, $A \setminus C$, $D \setminus C$, $B \cap C$!

58. (K) Ábrázold derékszögű koordináta – rendszerben azon pontok halmazát, amelyek

a) **az x – tengelytől nagyobb, mint 3 egység távolságra vannak!**

b) **az y – tengelytől legfeljebb 4 egység távolságra vannak!**

c) **a $P\ (3; 0)$ ponttól kisebb, mint 2 egység távolságra vannak!**

d) **a $Q\ (5; 0)$ ponttól legalább 1 egység távolságra vannak!**

e) **a $P\ (3; 0)$ ponthoz közelebb vannak, mint a $Q\ (5; 0)$ ponthoz!**

f) **az x és y tengelytől is egyenlő távolságra vannak!**

59. (K) Ábrázold az előző feladat $a)$ és $b)$ részében szereplő ponthalmaz metszetét!

60. (E) Adottak az $I_n =]0; n]$ intervallumok, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$. Található – e közöttük halmaz - részhalmaz párok? Írd fel intervallummal az $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \dots$, illetve az $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$ halmazt!

61. (E) Adottak az $I_n = \left[-\frac{1}{n}; 0\right[$ és $J_n = \left\{x \mid 0 \leq x < \frac{1}{n}\right\}$ halmazok $(n = 1, 2, \dots)$. Van – e olyan pontja a számegyenesnek, amely minden I_n, illetve J_n halmaznak eleme?

62. (E) Bizonyítsd be, hogy pontosan annyi páros szám van, mint természetes szám!

63. (E) Adott egy szálloda, melyben végtelen sok szoba található (a számozásuk 1 – től kezdődik). A hét egyik napján a szállodában teltház van. A recepciós a hangosbemondón keresztül mire kérje a már megszállt vendégeket, ha

a) **érkezik még egy 4 fős társaság?**

b) **érkezik egy végtelen sok üléssel rendelkező, megtelt busz?**

c) **érkezik még végtelen sok végtelen üléssel rendelkező, megtelt busz?**

d) **éjszaka érkeznek még véges sokan (előre nem tudják mennyien), s ők mindenképpen egymás mellett szeretnének lakni?**

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2001.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(9) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettésgi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $9-10.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(11) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(12) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(13) Saját anyagok