Megoldások

1. Melyik határoz meg halmazt az alábbiak közül?

A: József Attila hosszú versei

B: az első tíz prímszám

C: néhány darab páros szám

D: az osztály legokosabb tanulója

E: Debrecen általános iskolái

F: a jövő heti hatos lottó nyerőszámai

Megoldás:
Az egyértelműen meghatározott halmazok a következők: $B; E$.

2. Add meg a következő halmazokat körülírással, majd elemeik felsorolásával!

$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x^2 = 9 | x \in \mathbb{Z}}\}$

$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{|x| < 4 | x \in \mathbb{N}}\}$

$\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x \mid 7 | x \in \mathbb{Z}}\}$

$\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{2x - 1 | -2 < x \leq 3; x \in \mathbb{Z}}\}$

Megoldás:
A halmazok a következők:

$A = \{Olyan\ egész\ számok, melyek\ négyzete\ 9.\}$ $\quad A = \{-3; 3\}$

$B = \{A\ 4-nél\ kisebb\ abszolútértékű\ természetes\ számok.\}$ $\quad B = \{0; 1; 2; 3\}$

$C = \{Azok\ az\ egész\ számok, melyek\ osztói\ a\ 7-nek.\}$ $\quad C = \{-7; -1; 1; 7\}$

$D = \{A\ 2x - 1\ alakú\ számok, ahol -2 < x \leq 3\ és\ x \in \mathbb{Z}.\}$ $\quad D = \{-3; -1; 1; 3; 5\}$

3. Adj meg három különböző, végtelen halmazt úgy, hogy bármely kettő metszete üres, végtelen, illetve véges legyen!

Megoldás:
Egy – egy lehetséges megoldás a következő:

Első esetben: $A = \mathbb{Z}^+; B = \mathbb{Q}^-; C = \overline{Q}$.

Második esetben: $A = \{páratlan\ számok\}; B = \{3-mal\ osztható\ számok\}; C = \mathbb{N}$.

Harmadik esetben: $A =]-5; -3]; B = [-3; 8]; C = \mathbb{Z}^-$.

4. Adj meg három kételemű halmazt úgy, hogy bármely kettőnek legyen véges sok közös eleme, de a három halmaz közös része üres legyen!

Megoldás:
Egy lehetséges megoldás a következő: $A = \{1; 2\}; B = \{2; 3\}; C = \{1; 3\}$.

5. Adj meg három halmazt úgy, hogy bármely kettőnek legyen végtelen sok közös eleme, de a három halmaz közös része üres legyen!

Megoldás:
Egy lehetséges megoldás a következő: A halmazok legyenek egy háromszög alapú hasáb oldallapjainak síkjai.

6. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak, vagy hamisak!

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \quad \emptyset \subseteq \mathbb{N} \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{N} \quad \boldsymbol{Z} \subset \emptyset \quad \boldsymbol{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad \boldsymbol{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$

Megoldás:
A megoldások a következők: $I; H; I; I; H; H; I; I$.

7. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak, vagy hamisak!

$\boldsymbol{-2} \in \mathbb{N} \quad \boldsymbol{-3} \in \mathbb{Z} \quad \boldsymbol{\frac{1}{5}} \in \mathbb{Z} \quad \boldsymbol{-\frac{2}{3}} \in \mathbb{Q} \quad \boldsymbol{1,37} \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \boldsymbol{0} \in \mathbb{Q}$

$\boldsymbol{2,\dot{3}} \in \mathbb{Q} \quad \boldsymbol{4,\dot{5}6\dot{7}} \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \boldsymbol{-\pi} \in \mathbb{Q} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}} \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \boldsymbol{1\frac{5}{8}} \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{2\pi} \in \mathbb{R}$

Megoldás:
A megoldások a következők:

Első sorban: $H; I; H; I; H; I;$.

Második sorban: $I; H; H; I; I; I$.

8. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak, vagy hamisak!

$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{n\acute{e}gyzetek}\} \quad \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{deltoidok}\} \quad \boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{trap\acute{e}zok}\} \quad \boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{paralelogramm\acute{a}k}\}$

$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{D} \quad \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B} \subseteq \emptyset \quad \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{D} \quad \emptyset \subset \boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}$

Megoldás:
A megoldások a következők: $I; I; H; H; H; H; I; I$.

9. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak, vagy hamisak!

A: Ha $X \subseteq Y$, akkor $X \setminus Y = \emptyset$.

B: Ha $X \subset Y$, akkor $Y \setminus X = \emptyset$.

C: Ha $Y \subseteq X$, akkor $|Y| < |X|$.

D: Ha $X \cup Y = X \cap Y$, akkor $X \subset Y$.

Megoldás:
A megoldások a következők: $I; H; H; H$.

10. Sorold fel az $A = \{1; 2; 3; 4\}$ halmaz részhalmazait, illetve valódi részhalmazait!

Megoldás:
Az A halmaznak összesen $2^4 = 16$ darab részhalmaza van, s ezek a következők:

0 elemű: $\emptyset$ (üres halmaz)

1 elemű: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

2 elemű: $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{3; 4\}$

3 elemű: $\{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 3; 4\}, \{2; 3; 4\}$

4 elemű: $\{1; 2; 3; 4\}$

Az A halmaz valódi részhalmazai a következők:

0 elemű: $\emptyset$ (üres halmaz)

1 elemű: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

2 elemű: $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{3; 4\}$

3 elemű: $\{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 3; 4\}, \{2; 3; 4\}$

11. Hány elemű lehet az a halmaz, amelynek eggyel, kettővel, illetve hárommal több részhalmaza van, mint ahány eleme?

Megoldás:
A megoldások a következők:

Első esetben: az üres halmaz, illetve az egyelemű halmazok.

Második esetben: a két elemű halmazok.

Harmadik esetben: nincs ilyen halmaz.

12. Hány részhalmaza van a 200 – nál kisebb négyzetszámok halmazának?

Megoldás:
Az $A = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 196\}$ halmaznak 13 eleme van.

Ezek alapján a részhalmazok száma: $2^{13} = 8192$.

13. Hány elemű az a halmaz, amelynek legalább ezerrel több részhalmaza van, mint amennyi eleme?

Megoldás:
A szöveg alapján felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget: $2^n \geq n + 1000$.

Mivel $2^9 = 512$ és $2^{10} = 1024$, így legalább 10 elemű a keresett halmaz.

14. Egy 8 elemű halmaznak melyikből van több: 3 elemű, vagy 5 elemű részhalmazaiból?

Megoldás:
Amennyiben 8 elemből kiválasztunk 3 – at, akkor egyúttal azt az 5 – öt is kiválasztottuk, amelyek nem kerülnek az adott részhalmazba.

Ezek alapján egy 8 elemű halmaznak ugyanannyi 3 elemű részhalmaza van, mint 5 elemű.

15. Legyen az A a 100 - nál kisebb pozitív egész számok halmaza. Hány elemű az A összes részhalmazának az uniója?

Megoldás:
A részhalmazok elemei az eredeti halmaz elemeiből kerülnek ki, ezért a megoldás: $|A| = 99$.

16. Egy zsákban n darab különböző kis golyó van. Hányféleképpen vehetünk ki valamennyi golyót a zsákból, ha a kivétel belemarkolással történik és lehet, hogy egy golyót sem húzunk ki?

Megoldás:
A lehetőségek száma megegyezik a golyók által alkotott halmaz összes részhalmazainak a számával. Ezek alapján a megoldás: 2^n.

17. Hány olyan részhalmaza van az $A = \{a; b; c; d; e\}$ halmaznak, amelynek a c eleme?

Megoldás:
Vegyük ki a c elemet, így a megmaradt halmaznak $2^4 = 16$ részhalmaza van. Mivel mindegyikhez hozzáadva a c – t az eredeti halmaz részhalmazait kapjuk, így a megoldás is 16.

18. Hány olyan részhalmaza van az $A = \{a; b; c; d; e\}$ halmaznak, amelynek a b és a c közül legalább az egyik eleme?

Megoldás:
Az A halmaznak összesen $2^5 = 32$ részhalmaza van. Amennyiben a b és c közül egyiket se választhatjuk ki, akkor egy 3 elemű halmaz adódik, melynek összesen $2^3 = 8$ részhalmaza van. Ezek alapján a megoldás: $32 - 8 = 24$.

19. Legfeljebb hány részhalmazát választhatjuk ki egy 10 elemű halmaznak úgy, hogy semelyik két kiválasztott részhalmaz ne legyen diszjunkt?

Megoldás:
A részhalmazokat állítsuk párba úgy, hogy a párba állított részhalmazok diszjunktak legyenek, s uniójuk kiadja az eredeti halmazt: részhalmaz és komplementere alkot egy párt. Ekkor minden ilyen párból csak az egyik tagot választhatjuk ki. Mivel a 10 elemű halmaznak 2^{10} részhalmaza van, így a párba állítások miatt $\frac{2^{10}}{2} = 2^9$ – nél többet biztosan nem választhatunk ki.

A 2^9 – en részhalmaz kiválasztása viszont megvalósítható a következőkképpen: Vegyük ki az eredeti halmazból az egyik elemet, így a megmaradt halmaznak 2^9 - en részhalmaza lesz. Amennyiben ezek mindegyikéhez hozzáadjuk az előzőleg kivett elemet, akkor az eredeti halmaz részhalmazait kapjuk, melyek az adott elem miatt nem lesznek diszjunktak.

Ezek alapján a megoldás: $2^9 = 512$.

20. Bizonyítsd be, hogy egy n elemű halmaz páros és páratlan elemszámú részhalmazainak száma egyenlő! (Az üres halmaz elemszáma páros.)

Megoldás:
A részhalmazokat állítsuk párba úgy, hogy a párba állított részhalmazok diszjunktak legyenek, s uniójuk kiadja az eredeti halmazt: részhalmaz és komplementere alkot egy párt.

Amennyiben n páratlan, akkor a keletkező párokban az egyik részhalmaz elemszáma páros, a másiké pedig páratlan. Ezek alapján teljesül az állítás.

Amennyiben n páros, akkor vegyük ki az eredeti halmazból az egyik elemet. Az így keletkező páratlan elemszámú halmaznak ugyanannyi páros és páratlan elemszámú részhalmaza van, s ezek az eredeti halmaznak is részhalmazai. Amennyiben ezek mindegyikéhez hozzáadjuk az előzőleg kivett elemet, akkor az eredeti halmaz hiányzó részhalmazait kapjuk meg. Ebből adódik, hogy a hiányzó részhalmazok között is ugyanannyi páros elemszámú van, mint páratlan elemszámú. Ezek alapján az eredeti halmazra teljesül az állítás.

21. Döntsd el, hogy igazak – e az alábbi kijelentések tetszőleges A és B halmazokra!

A: Ha $a \notin A$ és $a \in B$, akkor $a \in (A \cap B)$.

B: Ha $a \notin A$ és $a \in B$, akkor $a \in (B \setminus A)$.

C: Ha $a \in A$ és $a \in B$, akkor $a \in (A \cup B)$.

D: Ha $a \in A$ és $a \in B$, akkor $a \in (A \setminus B)$.

E: Ha $a \in A$ és $a \notin B$, akkor $a \in (A \Delta B)$.

F: Ha $a \in (A \cup B)$, akkor $a \in A$, vagy $a \in B$.

G: Ha $a \in (A \cap B)$, akkor $a \in A$ és $a \in B$.

H: Ha $a \notin (A \cup B)$, akkor $a \notin A$ és $a \notin B$.

I: Ha $a \notin (A \cap B)$, akkor $a \notin A$ és $a \notin B$.

J: Ha $a \notin (A \Delta B)$, akkor $a \notin A$ és $a \in B$.

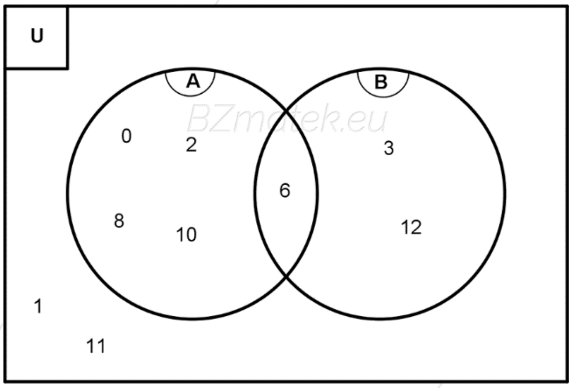
Megoldások:
A megoládsok a következők: $H; I; I; H; I; I; I; I; H; H$.

22. Tekintsd az $U = \{0; 1; 2; 3; 6; 8; 10; 11; 12\}$ alaphalmazon a következő halmazokat: $A = \{10 - \text{nél nem nagyobb, páros számok}\}$, $B = \{3x \mid x \in]0; 10]\}$. Add meg a következő halmazműveletek eredményét!

$B \setminus A$ $A \cup B$ $B \cap A$ $A \Delta B$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A \Delta B}$ $A \cup \overline{B}$

Megoldás:
Először adjuk meg a halmazokat elemeik felsorolásával: $A = \{0; 2; 6; 8; 10\}$ és $B = \{3; 6; 12\}$.

Ezt követően készítsünk Venn – diagramot:



Ezek alapján a műveleteknek megfelelő megoldások:

$B \setminus A = \{3; 12\}$

$A \cup B = \{0; 2; 3; 6; 8; 10; 12\}$

$B \cap A = \{6\}$

$A \Delta B = \{0; 2; 3; 8; 10; 12\}$

$\overline{A} = \{1; 3; 11; 12\}$

$\overline{B} = \{0; 1; 2; 8; 10; 11\}$

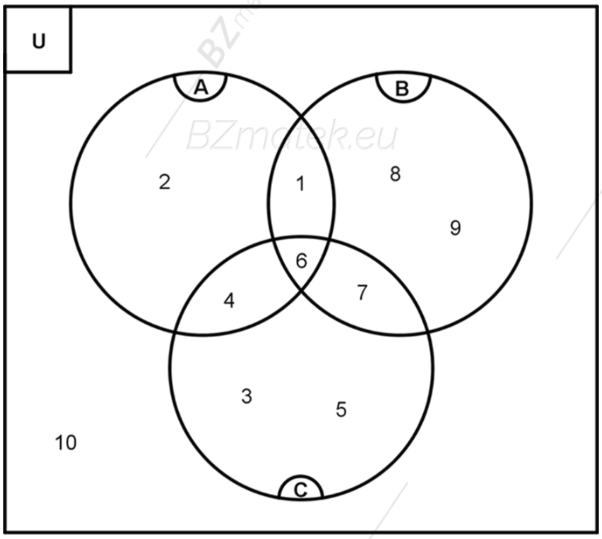
$\overline{A \Delta B} = \{1; 6; 11\}$

$A \cup \overline{B} = \{0; 1; 2; 6; 8; 10; 11\}$

23. Adottak a következő halmazok: $A = \{1; 2; 4; 6\}$, $B = \{1; 6; 7; 8; 9\}$, $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Az alaphalmaz: $U = \{1; 2; \dots; 9; 10\}$. Határozd meg a következő halmazokat!

$A \cap C$ $\quad B \,\Delta\, C$ $\quad A \setminus B$ $\quad \overline{A}$ $\quad C \,\Delta\, (B \setminus A)$ $\quad B \cup C \,\Delta\, A$ $\quad \overline{A} \cap B$ $\quad \overline{B \cup C}$

<u>Megoldás:</u>
Először készítsünk Venn – diagramot:



Ezt követően olvassuk le az egyes halmazműveletek eredményeit: amennyiben zárójel szerepel, akkor azt határozzuk meg első lépésben, egyébként balról jobbra haladva hajtjuk végre a műveleteket. A több műveletből álló kifejezésnél célszerű lépésenként kiírni a részeredményt.

Ezek alapján a műveleteknek megfelelő megoldások:

$A \cap C = \{4; 6\}$

$B \,\Delta\, C = \{1; 3; 4; 5; 8; 9\}$

$A \setminus B = \{2; 4\}$

$\overline{A} = \{3; 5; 7; 8; 9; 10\}$

$C \,\Delta\, (B \setminus A) \quad \rightarrow \quad B \setminus A = \{7; 8; 9\} \quad \rightarrow \quad C \,\Delta\, (B \setminus A) = \{3; 4; 5; 8; 9\}$

$B \cup C \,\Delta\, A \quad \rightarrow \quad B \cup C = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \quad \rightarrow \quad B \cup C \,\Delta\, A = \{2; 3; 5; 7; 8; 9\}$

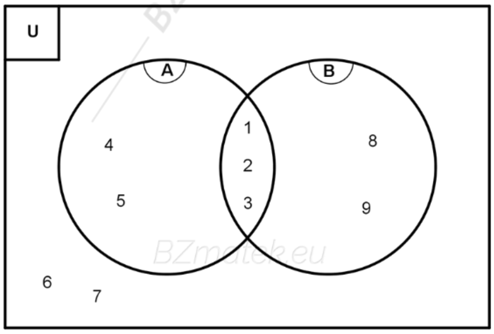
$\overline{A} \cap B = \{7; 8; 9\}$

$\overline{B \cup C} = \{2; 10\}$

24. Add meg az A és B halmaz elemeit, ha tudjuk, hogy $\boldsymbol{A \cap B = \{1; 2; 3\}}$, $\boldsymbol{\overline{B} = \{4; 5; 6; 7\}}$, $\boldsymbol{B \cup A = \{1; 2; 3; 4; 5; 8; 9\}}$ és az alaphalmaz: $\boldsymbol{U = \{1; 2; \dots; 8; 9\}}$!

Megoldás:
Először készítsünk Venn - diagramot, s írjuk be az elemeket az ábra megfelelő részeibe.

A kitöltést belülről kifele célszerű elkezdeni, vagyis első lépésben a metszetet töltsük ki.



Ezek alapján a megoldások: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ és $B = \{1; 2; 3; 8; 9\}$.

25. Az $\boldsymbol{M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}}$ halmaz $\boldsymbol{A, B}$ és $\boldsymbol{C}$ részhalmazairól az alábbiakat tudjuk: $\boldsymbol{A \cap B = \{2\}; (A \cup B) \cap C = \{5; 6\}; A \setminus C = \{2; 3; 4\}; C \setminus B = \{1; 5\}}$. Határozd meg az $\boldsymbol{A, B}$ és $\boldsymbol{C}$ halmazokat!

Megoldás:
Az adatokból a következők adódnak:

$A \cap B = \{2\}$ és $(A \cup B) \cap C = \{5; 6\}$ → a három halmaznak nincs közös eleme

$A \cap B = \{2\}$ és $(A \cup B) \cap C = \{5; 6\}$ → a 2 eleme A – nak és B – nek, de C – nek nem

$A \cap B = \{2\}$ és $A \setminus C = \{2; 3; 4\}$ → a 3,4 csak az A – nak eleme

$C \setminus B = \{1; 5\}$ és $(A \cup B) \cap C = \{5; 6\}$ → az 5 eleme A – nak és C – nek, de B – nek nem

$C \setminus B = \{1; 5\}$ és $(A \cup B) \cap C = \{5; 6\}$ → az 1 csak a C – nek eleme

$C \setminus B = \{1; 5\}$ és $(A \cup B) \cap C = \{5; 6\}$ → a 6 eleme B – nek és C – nek, de A – nak nem

Ezek alapján a megoldások: $A = \{2; 3; 4; 5\}; B = \{2; 6\}; C = \{1; 5; 6\}$.

26. Az A, B, C halmazokról a következőket tudjuk: $A \cup B \cup C = \{1; 2; \dots; 10; 11\}$; $A \setminus C = \{2; 7\}$; $A \cap B = \{2; 11\}$; $(B \cap C) \setminus A = \{3; 4\}$; $(B \cup C) \setminus A = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$. Add meg az A, B, C halmazok elemeit, ha tudjuk, hogy a B halmaznak csak két páratlan eleme van!

Megoldás:
Az adatokból a következők adódnak:

$A \setminus C = \{2; 7\}$ és $A \cap B = \{2; 11\}$ → a 11 mind a három halmaznak eleme

$A \setminus C = \{2; 7\}$ és $A \cap B = \{2; 11\}$ → a 2 eleme A – nak és B – nek, de C – nek nem

$A \setminus C = \{2; 7\}$ és $A \cap B = \{2; 11\}$ → a 7 csak az A – nak eleme

$(B \cap C) \setminus A = \{3; 4\}$ → a 3; 4 eleme B – nek és C – nek, de A – nak nem

$(B \cup C) \setminus A = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$ → az 1; 5; 6; 8 csak a B – nek, vagy a C – nek eleme

Mivel a B – ben már van két páratlan, így az 1; 5 csak a C – be kerülhet, míg a 6; 8 elemekről nincs egyértelmű információnk.

A fennmaradó 9; 10 eleme A – nak és C – nek, de B – nek nem.

Ezek alapján négy megoldás adódik:

$A = \{2; 7; 9; 10; 11\}; B = \{2; 3; 4; 11\}; C = \{1; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 11\}$

$A = \{2; 7; 9; 10; 11\}; B = \{2; 3; 4; 6; 11\}; C = \{1; 3; 4; 5; 8; 9; 10; 11\}$

$A = \{2; 7; 9; 10; 11\}; B = \{2; 3; 4; 8; 11\}; C = \{1; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 11\}$

$A = \{2; 7; 9; 10; 11\}; B = \{2; 3; 4; 6; 8; 11\}; C = \{1; 3; 4; 5; 9; 10; 11\}$

27. Határozd meg az A és B halmazokat, ha $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $A \cap B \not\subset \{3; 4; 5\}$; $A \setminus B = \{1; 4\}$; $|A| = |B|$!

Megoldás:
Az adatokból a következők adódnak:

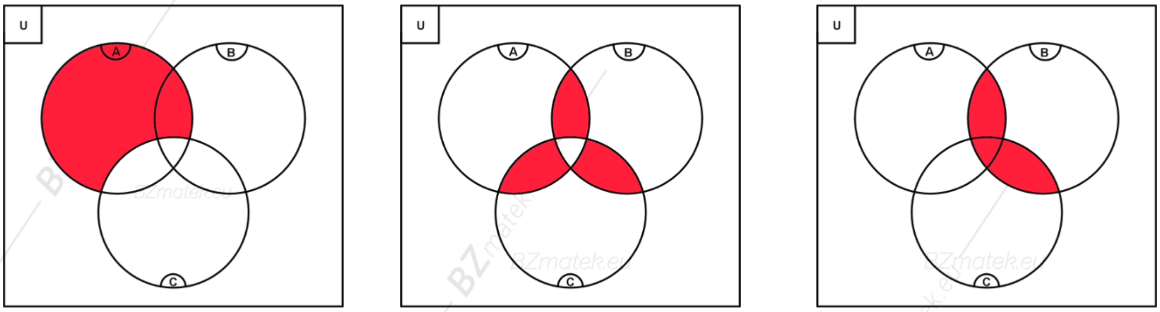
$A \setminus B = \{1; 4\}$ → az 1,4 csak az A – nak eleme

$A \setminus B = \{1; 4\}$ és $A \cap B \not\subset \{3; 4; 5\}$ → a 2 eleme A – nak és B – nek

$A \cap B \not\subset \{3; 4; 5\}$ és $|A| = |B|$ → a 3,5 csak a B – nek eleme

Ezek alapján a megoldások: $A = \{1; 2; 4\}$ és $B = \{2; 3; 5\}$.

28. Add meg halmazműveletekkel az ábra besatírozott területeit!



Megoldás:
Egy - egy lehetséges megoldások a következők:

$A \setminus C$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cup C) \cap B$

29. Adott az A, B és C halmazok. Írd fel halmazműveleti jelek segítségével azon elemek halmazát, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei, de ha elemei B – nek, akkor nem elemei A – nak!

Megoldás:
Egy lehetséges megoldás a következő: $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)$.

30. Legyen $|A| = 8, |B| = 11$. Mekkorák lehetnek az alábbi értékek?

$|A \cap B|$ $\qquad$ $|A \cup B|$ $\qquad$ $|A \setminus B|$ $\qquad$ $|B \setminus A|$

Megoldás:
A műveleteknek megfelelő megoldások a következők:

Az $|A \cap B|$ minimális értéke 0, maximális értéke 8.

Az $|A \cup B|$ minimális értéke 11, maximális értéke 19.

Az $|A \setminus B|$ minimális értéke 0, maximális értéke 8.

A $|B \setminus A|$ minimális értéke 3, maximális értéke 11.

31. Bizonyítsd be, hogy A, B véges halmazok esetén: $|A \,\Delta\, B| = |A| + |B| - 2 \cdot |A \cap B|$!

Megoldás:
Megfelelő átalakításokkal eljuthatunk a kívánt alakhoz:

$|A \,\Delta\, B| = |A \setminus B| \cup |B \setminus A| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2 \cdot |A \cap B|$.

32. Tudjuk, hogy $|U| = 20$, $|A| = 8$, $|B| = 7$, $|C| = 7$, $|A \cap B \cap C| = 2$, $|B \setminus C| = 4$, $|A \setminus B| = 5$, $|C \setminus A| = 3$, $|A \cap B| = 3$. Határozd meg a következő halmazműveletek elemszámát: $|A \setminus C|$, $|B \cap C|$, $|\overline{C}|$!

Megoldás:
Az adatokból a következők adódnak (célszerű halmazábrát készíteni és lépésenként kitölteni):

$|A \cap B \cap C| = 2$ → a három halmaz metszetébe 2 elem kerül

$|A \cap B| = 3$ és $|A \cap B \cap C| = 2$ → csak az A és B metszetébe 1 elem kerül

$|B \setminus C| = 4$ → csak a B halmazba 3 elem kerül

$|B| = 7$ → csak a B és C metszetébe 1 elem kerül

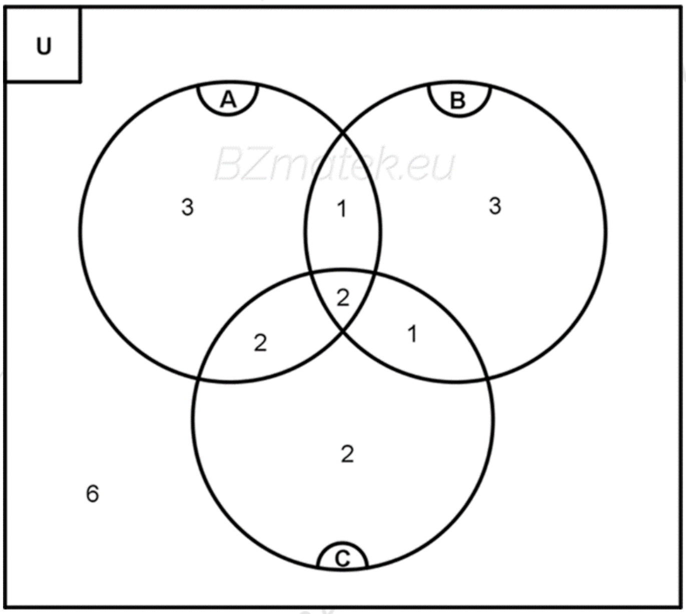
$|C \setminus A| = 3$ → csak a C halmazba 2 elem kerül

$|C| = 7$ → csak az A és C metszetébe 2 elem kerül

$|A \setminus B| = 5$ → csak az A halmazba 3 elem kerül

$|U| = 20$ → a három halmazon kívülre 6 elem kerül

A helyesen kitöltött Venn – diagramm:



Ezek alapján a megoldások: $|A \setminus C| = 4$, $|B \cap C| = 3$, $|\overline{C}| = 7$.

33. Hány eleműek az A, B és C halmazok, ha $|A \cup B \cup C| = 10$, $|A \cup B| = 8$, $|A \setminus B| = 3$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cap B \cap C| = 2$, $|A \cap C| = 3$ és $|B \setminus C| = 2$?

<u>Megoldás:</u>
Az adatokból a következők adódnak (célszerű halmazábrát készíteni és lépésenként kitölteni):

$|A \cap B \cap C| = 2$ → a három halmaz metszetébe 2 elem kerül

$|A \cap B| = 3$ és $|A \cap B \cap C| = 2$ → csak az A és B metszetébe 1 elem kerül

$|A \cap C| = 3$ és $|A \cap B \cap C| = 2$ → csak az A és C metszetébe 1 elem kerül

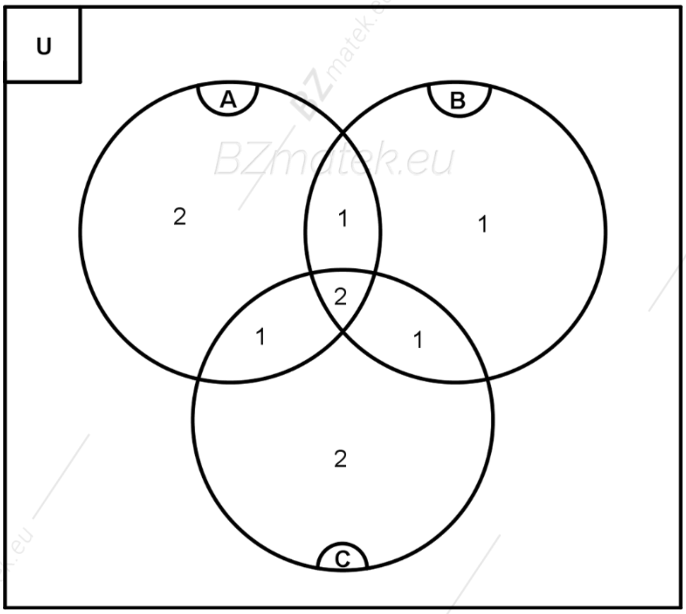
$|A \setminus B| = 3$ → csak az A halmazba 2 elem kerül

$|B \setminus C| = 2$ → csak a B halmazba 1 elem kerül

$|A \cup B| = 8$ → csak a B és C metszetébe 1 elem kerül

$|A \cup B \cup C| = 10$ → csak a C halmazba 2 elem kerül

A helyesen kitöltött Venn – diagramm:



Ezek alapján a megoldások: $|A| = 6$, $|B| = 5$, $|C| = 6$.

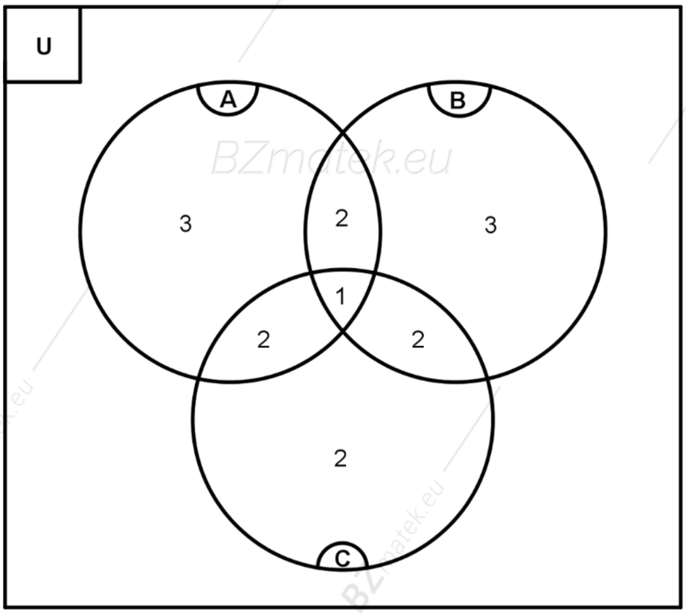
34. Az A, B és C halmazokról tudjuk, hogy $|A \setminus B| = 5, |B \setminus C| = 5, |C \setminus A| = 4,$ $|A \cap B \cap C| = 1, |A \cup B| = 13, |A \cup C| = 12$ és $|C| = 7$. Határozd meg az A és B halmazok elemszámát!

Megoldás:
Az adatokból a következők adódnak (célszerű halmazábrát készíteni és lépésenként kitölteni):

$|A \setminus B| + |B \setminus C| + |C \setminus A| + |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C| = 15$

$\lvert A \cap B \cap C\rvert = 1$	$\rightarrow$	a három halmaz metszetébe 1 elem kerül
$\lvert A \cup B \cup C\rvert = 15$ és $\lvert A \cup B\rvert = 13$	$\rightarrow$	csak a C halmazba 2 elem kerül
$\lvert A \cup B \cup C\rvert = 15$ és $\lvert A \cup C\rvert = 12$	$\rightarrow$	csak a B halmazba 3 elem kerül
$\lvert B \setminus C\rvert = 5$	$\rightarrow$	csak az A és B metszetébe 2 elem kerül
$\lvert C \setminus A\rvert = 4$	$\rightarrow$	csak a B és C metszetébe 2 elem kerül
$\lvert C\rvert = 7$	$\rightarrow$	csak az A és C metszetébe 2 elem kerül
$\lvert A \setminus B\rvert = 5$	$\rightarrow$	csak az A halmazba 3 elem kerül

A helyesen kitöltött Venn – diagramm:



Ezek alapján a megoldások: $|A| = 8$ és $|B| = 8$.

35. Legyen A, B és C olyan halmazok, melyekre $A \cap C = B \cap C$ és $A \setminus C = B \setminus C$. Bizonyítsd be, hogy $A = B$!

Megoldás:
Legyen $x \in A$. Ha $x \in C$, akkor $x \in A \cap C = B \cap C$ miatt $x \in B$ is teljesül. Amennyiben $x \notin C$, akkor $x \in A \setminus C = B \setminus C$ miatt $x \in B$ is teljesül. Ebből adódik, hogy $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül, vagyis $A \subseteq B$. Mivel az A és B halmaz szerepe felcserélhető, így $B \subseteq A$ is teljesül. Ezek alapján adódik a bizonyítandó állítás: $A = B$.

36. Legyen A, B és C olyan halmazok, melyekre $A \cup C = B \cup C$ és $C \setminus A = C \setminus B$. Bizonyítsd be, hogy $A = B$!

Megoldás:
Legyen $x \in A$. Mivel $A \subseteq A \cup C = B \cup C$, így ha $x \notin B$, akkor $x \in C$. Ekkor azonban $x \in C \setminus B$ és $x \notin C \setminus A$, ami $x \in C \setminus B = C \setminus A$ miatt ellentmondás. Ebből adódik, hogy $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül, vagyis $A \subseteq B$. Mivel az A és B halmaz szerepe felcserélhető, így $B \subseteq A$ is teljesül. Ezek alapján adódik a bizonyítandó állítás: $A = B$.

37. Hány olyan egész szám van 1 - től 300 - ig, amely osztható 4 – gyel, vagy 6 – tal?

Megoldás:
Alkalmazzuk a Szita – formulát a következő két halmazra:

- $A = \{1 - től\ 300 - ig\ a\ 4 - gyel\ osztható\ egész\ számok\}$
- $B = \{1 - től\ 300 - ig\ a\ 6 - tal\ osztható\ egész\ számok\}$

Határozzuk meg a két halmaz metszetét (4 és 6 legkisebb közös többszörösét):

- $A \cap B = \{1 - től\ 300 - ig\ a\ 12 - vel\ osztható\ egész\ számok\}$

Ezt követően számítsuk ki az adott halmazok számosságát:

- $|A| = \frac{300}{4} = 75$
- $|B| = \frac{300}{6} = 50$
- $|A \cap B| = \frac{300}{12} = 25$

Ezek alapján a megoldás: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 75 + 50 - 25 = 100$.

38. Hány olyan 400 - nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely nem osztható 3 - mal, 5 - tel és 7 - tel sem?

Megoldás:
Először számoljuk ki, hogy mennyi olyan szám van 1 - től 400 - ig, amely osztható 3 - mal, 5 - tel vagy 7 - tel, majd ezeket vonjuk ki az alaphalmaz elemeiből.

Alkalmazzuk a Szita – formulát a következő három halmazra:

- $A = \{400 - nál\ nem\ nagyobb, 3 - mal\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $B = \{400 - nál\ nem\ nagyobb, 5 - tel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $C = \{400 - nál\ nem\ nagyobb, 7 - tel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$

Határozzuk meg a három halmaz metszeteit (a legkisebb közös többszörösöket):

- $A \cap B = \{400 - nál\ nem\ nagyobb, 15 - tel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $B \cap C = \{400 - nál\ nem\ nagyobb, 35 - tel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $A \cap C = \{400 - nál\ nem\ nagyobb, 21 - gyel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $A \cap B \cap C = \{400 - nál\ nem\ nagyobb, 105 - tel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$

Ezt követően számítsuk ki az adott halmazok számosságát:

- $|U| = 400$
- $|A| = \frac{400}{3} = 133{,}3$ → ebben az esetben 133 darab 3 - mal osztható szám van
- $|B| = \frac{400}{5} = 80$
- $|C| = \frac{400}{7} = 57{,}1$ → ebben az esetben 57 darab 7 - tel osztható szám van
- $|A \cap B| = \frac{400}{15} = 26{,}6$ → ebben az esetben 26 darab 15 - tel osztható szám van
- $|B \cap C| = \frac{400}{35} = 11{,}4$ → ebben az esetben 11 darab 35 - tel osztható szám van
- $|A \cap C| = \frac{400}{21} = 19{,}04$ → ebben az esetben 19 darab 21 - gyel osztható szám van
- $|A \cap B \cap C| = \frac{400}{105} = 3{,}8$ → ebben az esetben 3 darab 105 -tel osztható szám van

Ebből a következő adódik:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| =$

$= 133 + 80 + 57 - 26 - 11 - 19 + 3 = 217$

Ezek alapján a megoldás: $|U| \setminus |A \cup B \cup C| = 400 - 217 = 183$.

39. Az 1000 – nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amelyik

_a)_ a 2 és 3 közül legalább az egyikkel osztható

_b)_ a 2 és 3 közül legfeljebb az egyikkel osztható

_c)_ a 2 és 3 közül pontosan az egyikkel osztható

_d)_ ha osztható 2 – vel, akkor osztható 3 – mal is

_e)_ a 2 és 3 közül ha osztható az egyikkel, akor osztható a másikkal is?

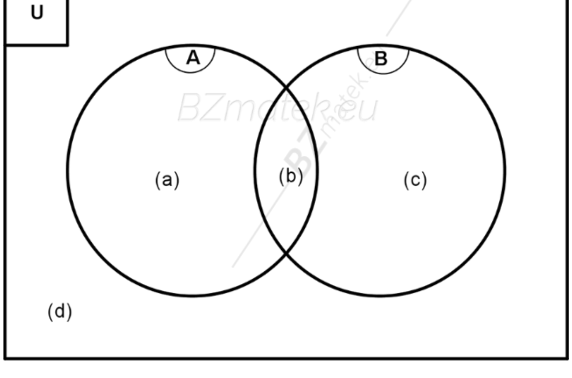
Megoldás:
Tekintsük a következő két halmazt:

- $A = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb, 2 - vel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $B = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb, 3 - mal\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$

Határozzuk meg a két halmaz metszetét (2 és 3 legkisebb közös többszörösét):

- $A \cap B = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb,\ 6 - tal\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$

Jelöljük el a halmazábra tartományait a következőképpen:



Ezt követően számítsuk ki az adott halmazok számosságát:

$|A| = \frac{1000}{2} = 500$

$|B| = \frac{1000}{3} = 333{,}3$ $\quad\rightarrow\quad$ ebben az esetben 333 darab 3 - mal osztható szám van

$|A \cap B| = \frac{1000}{6} = 166{,}6$ $\quad\rightarrow\quad$ ebben az esetben 166 darab 6 - tal osztható szám van

Ebből adódnak a halmazábra egyes tartományainak elemszámai:

$(b) = 166$

$(a) = 500 - 166 = 334$

$(c) = 333 - 166 = 167$

$(d) = 1000 - 334 - 166 - 167 = 333$

A megoldásokat a megfelelő részek elemszámai adják meg.

a) A feladatnak megfelelő részek: $(a), (b), (c)$.

Ezek alapján a megoldás: $(a) + (b) + (c) = 334 + 166 + 167 = 667$.

b) A feladatnak megfelelő részek: $(a), (c), (d)$.

Ezek alapján a megoldás: $(a) + (c) + (d) = 334 + 167 + 333 = 834$.

c) A feladatnak megfelelő részek: $(a), (c)$.

Ezek alapján a megoldás: $(a) + (c) = 334 + 167 = 501$.

d) A feladatnak megfelelő részek: $(b), (c), (d)$.

Ezek alapján a megoldás: $(b) + (c) + (d) = 166 + 167 + 333 = 666$.

e) A feladatnak megfelelő részek: $(b), (d)$.

Ezek alapján a megoldás: $(b) + (d) = 166 + 333 = 499$.

40. Az 1000 – nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amelyik

a) **a $2, 3, 5$ számok közül pontosan a 2 – vel osztható**

b) **a $2, 3, 5$ számok közül pontosan kettővel osztható?**

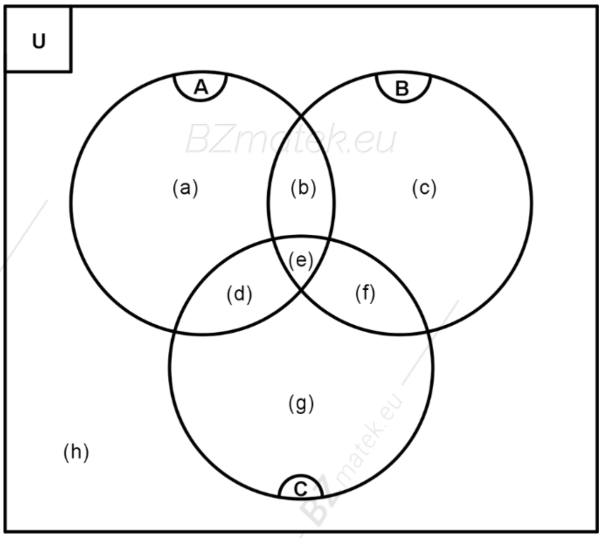
Megoldás:
Tekintsük a következő három halmazt:

- $A = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb, 2 - vel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $B = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb, 3 - mal\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $C = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb, 5 - tel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$

Határozzuk meg a három halmaz metszeteit (a legkisebb közös többszörösöket):

- $A \cap B = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb, 6 - tal\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $B \cap C = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb, 15 - tel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $A \cap C = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb, 10 - zel\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $A \cap B \cap C = \{1000 - nél\ nem\ nagyobb, 30 - cal\ osztható\ pozitív\ egész\ számok\}$

Jelöljük el a halmazábra tartományait a következőképpen:



Ezt követően számítsuk ki az adott halmazok számosságát:

- $|A| = \frac{1000}{2} = 500$
- $|B| = \frac{1000}{3} = 333{,}3$ → ebben az esetben 333 darab 3 - mal osztható szám van
- $|C| = \frac{1000}{5} = 200$
- $|A \cap B| = \frac{1000}{6} = 166{,}6$ → ebben az esetben 166 darab 6 - tal osztható szám van
- $|B \cap C| = \frac{1000}{15} = 66{,}6$ → ebben az esetben 66 darab 15 - tel osztható szám van
- $|A \cap C| = \frac{1000}{10} = 100$
- $|A \cap B \cap C| = \frac{1000}{30} = 33{,}3$ → ebben az esetben 33 darab 30 - cal osztható szám van

Ebből adódnak a halmazábra egyes tartományainak elemszámai:

$(e) = 33$

$(b) = 166 - 33 = 133$

$(d) = 100 - 33 = 67$

$(f) = 66 - 33 = 33$

$(a) = 500 - 133 - 67 - 33 = 267$

$(c) = 333 - 133 - 33 - 33 = 134$

$(g) = 200 - 67 - 33 - 33 = 67$

$(h) = 1000 - 267 - 133 - 134 - 67 - 33 - 33 - 67 = 266$

A megoldásokat a megfelelő részek elemszámai adják meg.

a) A feladatnak megfelelő részek: (a).

Ezek alapján a megoldás: $(a) = 267$.

b) A feladatnak megfelelő részek: $(b), (d), (f)$.

Ezek alapján a megoldás: $(b) + (d) + (f) = 133 + 67 + 33 = 233$.

41. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyik

a) **osztható 3 – mal, vagy 4 – gyel, de nem osztható 5 – tel?**

b) **osztható 3 – mal és 5 – tel, de nem osztható 4 – gyel?**

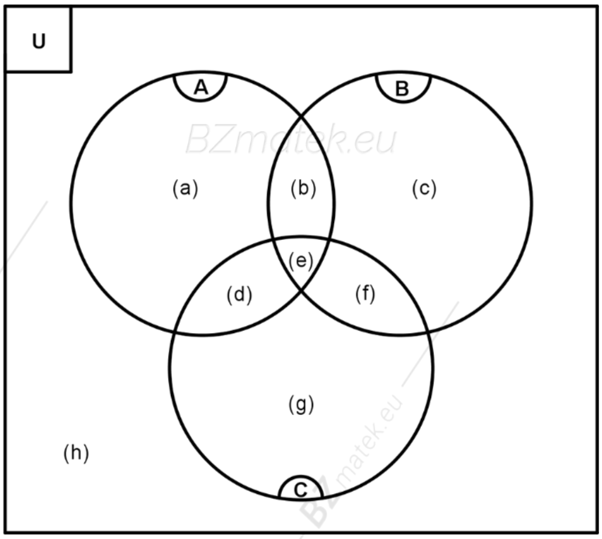
Megoldás:
Tekintsük a következő három halmazt:

- $A = \{\, 3 - mal\ osztható\ háromjegyű\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $B = \{4 - gyel\ osztható\ háromjegyű\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $C = \{5 - tel\ osztható\ háromjegyű\ pozitív\ egész\ számok\}$

Határozzuk meg a három halmaz metszeteit (a legkisebb közös többszörösöket):

- $A \cap B = \{12 - vel\ osztható\ háromjegyű\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $B \cap C = \{20 - szal\ osztható\ háromjegyű\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $A \cap C = \{15 - tel\ osztható\ háromjegyű\ pozitív\ egész\ számok\}$
- $A \cap B \cap C = \{60 - nal\ osztható\ háromjegyű\ pozitív\ egész\ számok\}$

Jelöljük el a halmazábra tartományait a következőképpen:



A háromjegyű pozitív egészek száma: $999 - 100 + 1 = 900$.

Ezt követően számítsuk ki az adott halmazok számosságát:

- $|A| = \frac{900}{3} = 300$
- $|B| = \frac{900}{4} = 225$
- $|C| = \frac{900}{5} = 180$
- $|A \cap B| = \frac{900}{12} = 75$
- $|B \cap C| = \frac{900}{20} = 45$
- $|A \cap C| = \frac{900}{15} = 60$
- $|A \cap B \cap C| = \frac{900}{60} = 15$

Ebből adódnak a halmazábra egyes tartományainak elemszámai:

$(e) = 15$

$(b) = 75 - 15 = 60$

$(d) = 60 - 15 = 45$

$(f) = 45 - 15 = 30$

$(a) = 300 - 15 - 60 - 45 = 180$

$(c) = 225 - 15 - 60 - 30 = 120$

$(g) = 180 - 15 - 45 - 30 = 90$

$(h) = 900 - 15 - 60 - 45 - 30 - 180 - 120 - 90 = 360$

A megoldásokat a megfelelő részek elemszámai adják meg.

a) A feladatnak megfelelő részek: $(a), (b), (c)$.

Ezek alapján a megoldás: $(a) + (b) + (c) = 180 + 60 + 120 = 360$.

b) A feladatnak megfelelő részek: (d).

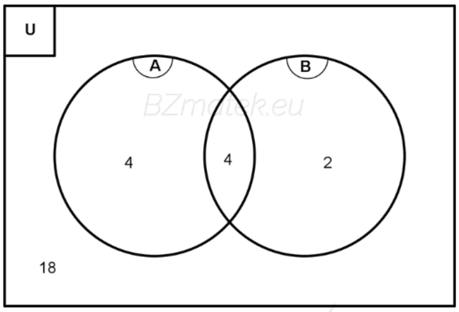
Ezek alapján a megoldás: $(d) = 45$.

42. Egy osztály 28 tanulója közül 8 – an felvételiznek matematikából, 6 – an fizikából, 4 tanuló matematikából is és fizikából is. Hányan nem felvételiznek egyik említett tárgyból sem?

Megoldás:
Tekintsük a következő két halmazt:

$A = \{matematikából\ felvételizők\}$ $\qquad$ $B = \{fizikából\ felvételizők\}$

Készítsünk Venn – diagramot az adatok segítségével (első lépésben a metszetet töltsük ki):



Ezek alapján a megoldás: 18.

43. Tudjuk, hogy egy 28 fős osztályban nincs jelese 23 tanulónak fizikából és 21 tanulónak matematikából. Hány tanulónak van matematikából és fizikából is jeles osztályzata, ha tudjuk, hogy matematikából vagy fizikából 10 – en kaptak jelest?

Megoldás:
Tekintsük a következő két halmazt:

$A = \{fizikából\ jelese\ van\}$ $\qquad$ $B = \{matematikából\ jelese\ van\}$

A szövegből a következő adatok adódnak: $|U| = 28$; $|\overline{A}| = 23$; $|\overline{B}| = 21$; $|A \cup B| = 10$.

$|U| = 28$ és $|A \cup B| = 10$ → 18 diáknak nincs jelese egyik tárgyból sem

$|\overline{A}| = 23$ → 5 diáknak csak matematikából van jelese

$|\overline{B}| = 21$ → 3 diáknak csak fizikából van jelese

$|A \cup B| = 10$ → 2 diáknak mindkét tárgyból jelese van

Ezek alapján a megoldás: 2.

44. Egy 20 fős csoportban 14 – en beszélnek angolul, s 9 – en németül. Hányan beszélnek mindkét nyelven, ha tudjuk, hogy a csoportban nincs olyan, aki ne beszélné legalább az egyik nyelvet?

Megoldás:
Tekintsük a következő két halmazt:

$A = \{angolul\ beszélők\}$ $\qquad$ $B = \{németül\ beszélők\}$

A szövegből a következő adatok adódnak: $|U| = 20$; $|A| = 14$; $|B| = 9$; $|\overline{A \cup B}| = 0$.

$|U| = 20$ és $|A| = 14$ $\rightarrow$ 6 diák csak a németet beszéli

$|U| = 20$ és $|B| = 9$ $\rightarrow$ 11 diák csak az angolt beszéli

$|U| = 20$ $\rightarrow$ 3 diák mindkét nyelvet beszéli

Ezek alapján a megoldás: 3.

45. Egy matematikaversenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot az indulók $70\,\%$ - a, a másodikat pedig az indulók $60\,\%$ - a oldotta meg. Minden induló megoldott legalább egy feladatot, és 9 – en mindkét feladatot megoldották. Hányan indultak a versenyen?

Megoldás:
Legyen az indulók száma: $|U| = x$. Tekintsük a következő két halmazt:

$A = \{első\ feladatot\ megoldók\}$ $\qquad$ $B = \{második\ feladatot\ megoldók\}$

A szövegből a következő adatok adódnak: $|A| = 0{,}7x$; $|B| = 0{,}6x$; $|A \cap B| = 6$; $|\overline{A \cup B}| = 0$.

$|A \cap B| = |A| + |B| - |U| = 0{,}7x + 0{,}6x - x = 0{,}3x \quad \rightarrow \quad 0{,}3x = 9 \quad \rightarrow \quad x = 30$

Ezek alapján a megoldás: az osztályba 30 – an járnak és közülük 9 – en írtak közepest.

46. Egy osztály tanulóinak az 50 % - a közepesnél nem jobb, míg a $\frac{4}{5}$ – része közepesnél nem rosszabb dolgozatot írt. Hányan járnak az osztályba, ha a dolgozatírásnál senki sem hiányzott, és közepesnél rosszabb dolgozatot 6 – an írtak? Mennyi volt a közepes?

Megoldás:
Legyen az osztály létszáma: $|U| = x$. Tekintsük a következő két halmazt:

$A = \{közepesnél\ nem\ jobbak\}$ $B = \{közepesnél\ nem\ rosszabbak\}$

A szövegből a következő adatok adódnak: $|A| = 0{,}5x$; $|B| = 0{,}8x$; $|A \setminus B| = 6$; $|\overline{A \cup B}| = 0$.

$|A \cap B| = |A| + |B| - |U| = 0{,}5x + 0{,}8x - x = 0{,}3x$

$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 0{,}5x - 0{,}3x = 0{,}2x \quad \rightarrow \quad 0{,}2x = 6 \quad \rightarrow \quad x = 30$

Ezek alapján a megoldás: az osztályba 30 – an járnak és közülük 9 – en írtak közepest.

47. Egy ornitológus megfigyelte, hogy a területén élő 200 szarka 60 % - ának a farka tarka, 70 % - ának hosszú a csőre. A tarka farkú és hosszú csőrű szarkák aránya az összes szarkához viszonyítva 40 %. Hány egyed van, amelyiknek rövid csőréhez egyszínű faroktollazat tartozik?

Megoldás:
Tekintsük a következő két halmazt:

$A = \{tarka\ farkú\ szarka\}$ $B = \{hosszú\ csőrű\ szarka\}$

A szövegből a következő adatok adódnak: $|U| = 200$; $|A| = 120$; $|B| = 140$; $|A \cap B| = 80$.

Írjuk fel a logikai – szitát a két halmazra:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 + 140 - 80 = 180.$

Ezek alapján a megoldás: $|\overline{A \cup B}| = 200 - 180 = 20.$

48. Egy gimnázium kémia – biológia tagozatos osztályába 76 tanuló felvételizett. A felvételizők közül volt, aki csak a kémia, és volt, aki csak a biológia tagozatot jelölte meg, de 29 – en mindkét tagozatra beadták a jelentkezési lapjukat. Bizonyítsd be, hogy a két tagozatra nem jelentkezhetett ugyanannyi diák!

Megoldás:
Legyen a két szakra külön – külön jelentkezők száma: x. Tekintsük a következő két halmazt:

$A = \{kémiára\ jelentkezők\}$ $B = \{biológiára\ jelentkezők\}$

A szövegből a következő adatok adódnak: $|A \cup B| = 76$; $|A \cap B| = 29$.

Írjuk fel a logikai – szitát a két halmazra:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = x + x - 29 = 2x - 29$.

Ebből felírhatjuk a következő egyenletet: $2x - 29 = 76$.

Mivel $x = 52{,}5$ nem felel meg a feladat szövegének, így nem jelentkezhettek ugyanannyian.

49. Egy osztály létszáma 30. Az osztályban három nyelvet tanulnak, angolt, oroszt és franciát, és minden diák legalább egy nyelvet tanul. Angolul 14 – en tanulnak, oroszul 15 – en, franciául pedig 5 – en. Pontosan két nyelvet összesen 6 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

Megoldás:
Legyen a mindhárom nyelvet tanulók száma: x. Tekintsük a következő három halmazt:

$A = \{angolt\ tanulók\}$ $B = \{oroszt\ tanulók\}$ $C = \{németet\ tanulók\}$

Írjuk fel a logikai – szitát a három halmazra:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$

$= |A| + |B| + |C| - [|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|] + |A \cap B \cap C|$

Ebből felírhatjuk a következő egyenletet: $14 + 15 + 5 - (6 + 3x) + x = 30$.

Mivel $x = -1$ nem felel meg a feladat szövegének, így nincs megoldás.

50. Egy osztály tanulói 3 feladatból álló dolgozatot írtak matematikából. Az első feladatot 14 – en, a másodikat 13 – an, a harmadikat pedig 11 – en oldották meg. 7 tanuló az első és második, 6 a második és harmadik, és 4 gyerek az első és harmadik példát is megoldotta. Mindössze 4 diák tudta mindhárom feladatot elkészíteni. Hányan vannak az osztályban, ha mindenki legalább egy feladatot megoldott?

Megoldás:
Tekintsük a következő három halmazt:

$A = \{elsőt\ megoldók\}$ $B = \{másodikat\ megoldók\}$ $C = \{harmadikat\ megoldók\}$

Az adatokból a következők adódnak (célszerű halmazábrát készíteni és lépésenként kitölteni):

$|A \cap B \cap C| = 4$ → a három halmaz metszetébe 4 diák kerül

$|A \cap B| = 7$ és $|A \cap B \cap C| = 4$ → csak az A és B metszetébe 3 diák kerül

$|B \cap C| = 6$ és $|A \cap B \cap C| = 4$ → csak a B és C metszetébe 2 diák kerül

$|A \cap C| = 4$ és $|A \cap B \cap C| = 4$ → csak az A és C metszetébe nem kerül diák

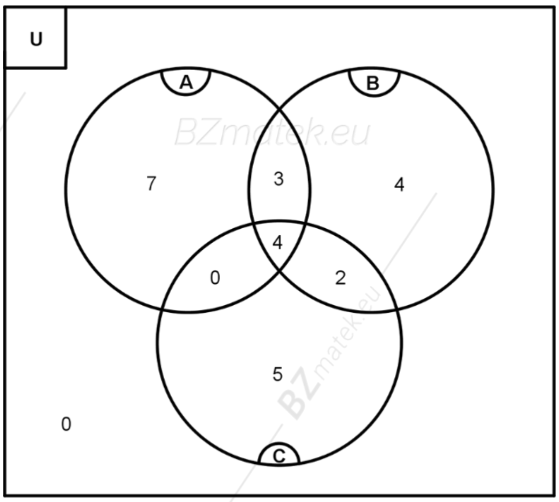
$|A| = 14$ → csak az A halmazba 7 diák kerül

$|B| = 13$ → csak a B halmazba 4 diák kerül

$|C| = 11$ → csak a C halmazba 5 diák kerül

$\left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = 0$ → a három halmazon kívülre nem kerül diák

A helyesen kitöltött Venn – diagramm:



Ezek alapján a megoldás: $|A \cup B \cup C| = 7 + 3 + 4 + 0 + 4 + 2 + 5 + 0 = 25$.

51. A 35 fős $9.E$. osztály az osztálykiránduláson, amelyre mind a 35 tanuló elment, salátát rendelt vacsorára. A vacsora végén kiderült, hogy háromfélét ettek: gyümölcssalátát, kukoricasalátát, tonhalsalátát, és mindenki rendelt valamilyet a három közül. Kukoricasalátát 14 - en, gyümölcssalátát 15 - en, tonhalsalátát 13 - an. Egy diák rendelt mindháromból. A kukoricasalátát rendelők közül 11 - en nem kértek gyümölcssalátát. 9 olyan diák volt, aki sem kukoricás, sem gyümölcssalátát nem evett. A csak gyümölcssaláták rendelők 1 - gyel többen voltak, mint a csak tonhalasat rendelők.

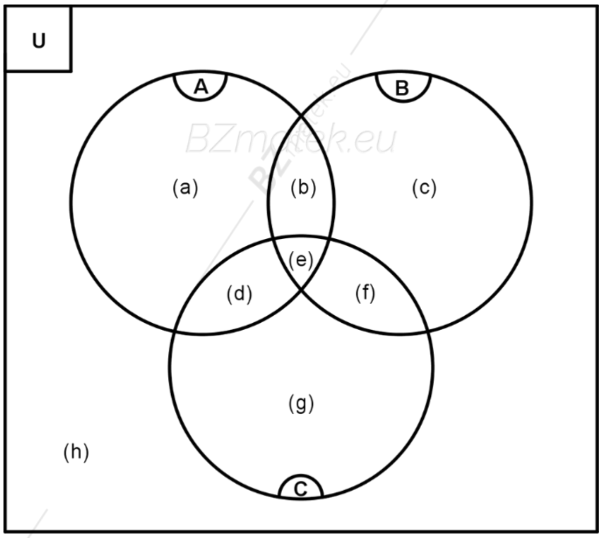
***a)* Hány olyan tanuló volt, aki tonhalas és gyümölcssalátát is rendelt?**

***b)* Hány olyan tanuló volt, aki csak kukoricás salátát rendelt?**

Megoldás:
Tekintsük a következő három halmazt:

$A = \{kukoricásat\ kérők\}$ $B = \{gyümölcsöset\ kérők\}$ $C = \{tonhalasat\ kérők\}$

Jelöljük el a halmazábra tartományait a következőképpen:



A feladat szövegének segítségével felírhatjuk a következőket:

$(h) = 0$ $(e) = 1$

$(a) + (b) + (d) + (e) = 14$ $(a) + (d) = 11$

$(b) + (c) + (e) + (f) = 15$ $(g) = 9$

$(d) + (e) + (f) + (g) = 13$ $(c) = (g) + 1$

Ezt követően töltsük ki lépésről lépésre az ábrát. A kitöltését belülről kifele célszerű elkezdeni, vagyis először a metszetet töltsük ki. Miután beírtunk néhány adatot az ábrába, újra átolvassuk az eddig fel nem használt információkat, s így a már beírt adatok segítségével újabb tartományokat tudunk kitölteni.

A tartományok kitölthetők a következő sorrendben:

$(c) = (g) + 1 = 9 + 1 = 10$

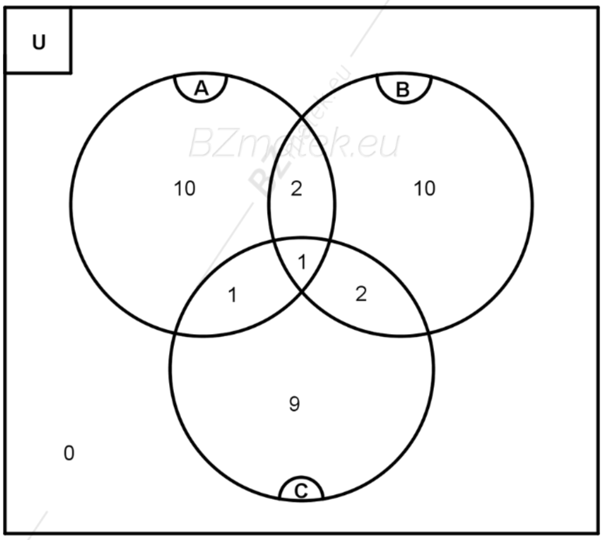
$(a) + (b) + (d) + (e) = 14 \quad \rightarrow \quad 11 + (b) + 1 = 14 \quad \rightarrow \quad (b) = 2$

$(b) + (c) + (e) + (f) = 15 \quad \rightarrow \quad 2 + 10 + 1 + (f) = 15 \quad \rightarrow \quad (f) = 2$

$(d) + (e) + (f) + (g) = 13 \quad \rightarrow \quad (d) + 1 + 2 + 9 = 13 \quad \rightarrow \quad (d) = 1$

$(a) + (d) = 11 \quad \rightarrow \quad (a) + 1 = 11 \quad \rightarrow \quad (a) = 10$

A helyesen kitöltött Venn – diagramm:



Ezek alapján a megoldások:

a) $(e) + (f) = 3$, vagyis 3 olyan tanuló volt, aki tonhalas és gyümölcssalátát is rendelt.

b) $(a) = 10$, vagyis 10 olyan tanuló volt, aki csak kukoricás salátát rendelt.

52. Egy 36 főből álló csoporttal teszteltek három terméket, legyenek ezek: A, B és C. 20 főnek tetszett az A és a C termék, 8-nak a B és a C termék. Csak az A, illetve csak a B termék $2-2$ tesztelőnek felelt meg. Az A vagy a B terméket viszont 29 - en tartották jónak. A C termék szintén 29 embernek felelt meg. Mindhárom termék csupán 3 embernek tetszett.

a) **Hány tesztelőnek tetszett pontosan két termék?**

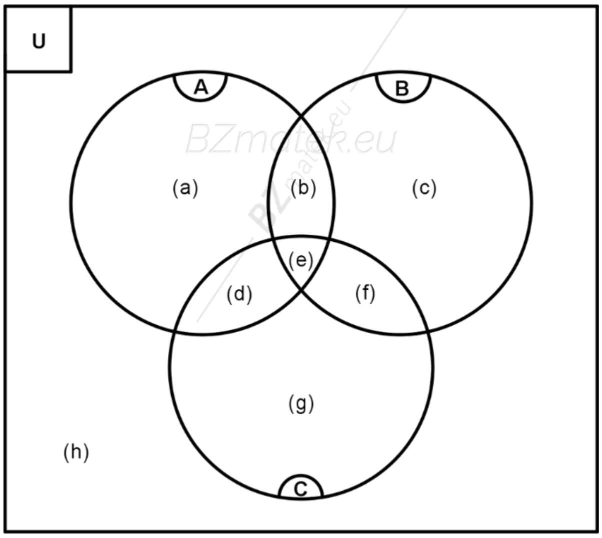
b) **Hozzájuk képest többen vagy kevesebben voltak, akiknek csak egy termék volt jó?**

c) **Mennyien vannak azok, akiknek egyetlen termék sem volt megfelelő?**

<u>Megoldás:</u>
Tekintsük a következő három halmazt:

$A = \{A - t\ jónak\ ítélők\}$ $\quad B = \{B - t\ jónak\ ítélők\}$ $\quad C = \{C - t\ jónak\ ítélők\}$

Jelöljük el a halmazábra tartományait a következőképpen:



A feladat szövegének segítségével felírhatjuk a következőket:

$(a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f) + (g) + (h) = 36$ $\qquad (c) = 2$

$(d) + (e) = 20$ $\qquad (a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f) = 29$

$(e) + (f) = 8$ $\qquad (d) + (e) + (f) + (g) = 29$

$(a) = 2$ $\qquad (e) = 3$

Ezt követően töltsük ki lépésről lépésre az ábrát. A kitöltését belülről kifele célszerű elkezdeni, vagyis először a metszetet töltsük ki. Miután beírtunk néhány adatot az ábrába, újra átolvassuk az eddig fel nem használt információkat, s így a már beírt adatok segítségével újabb tartományokat tudunk kitölteni.

A tartományok kitölthetők a következő sorrendben:

$(d) + (e) = 20 \quad \rightarrow \quad (d) + 3 = 20 \quad \rightarrow \quad (d) = 17$

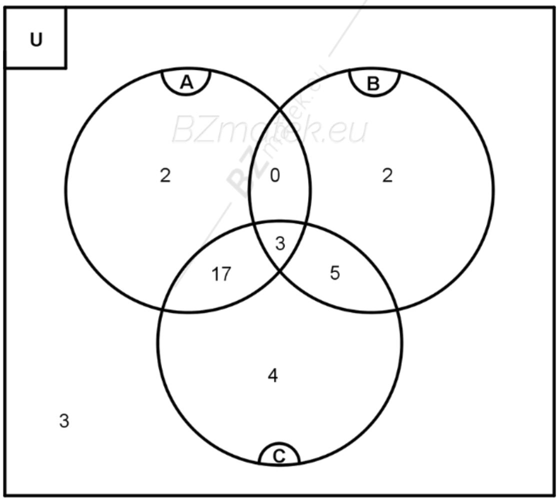
$(e) + (f) = 8 \quad \rightarrow \quad 3 + (f) = 8 \quad \rightarrow \quad (f) = 5$

$(d) + (e) + (f) + (g) = 29 \quad \rightarrow \quad 17 + 3 + 5 + (g) = 29 \quad \rightarrow \quad (g) = 4$

$(a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f) = 29 \quad \rightarrow \quad (b) = 0$

$(a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f) + (g) + (h) = 36 \quad \rightarrow \quad (h) = 3$

A helyesen kitöltött Venn – diagramm:



Ezek alapján a megoldások:

a) $(b) + (d) + (f) = 0 + 17 + 5 = 22$, vagyis 22 - en tartottak jónak pontosan két terméket.

b) $(a) + (c) + (g) = 2 + 2 + 4 = 8$, vagyis kevesebben vannak, akiknek csak egy felelt meg.

c) $(h) = 3$, vagyis 3 - nak nem jó egyetlen termék sem.

53. Egy matematikai versenyen három feladatot tűztek ki. A 184 versenyző közül mindenki megoldott legalább egy feladatot. Az első példát 90, a másodikat 80, a harmadikat 50 induló oldotta meg helyesen, pontosan két jó feladatmegoldása 32 diáknak volt.

a) **Hány olyan versenyző volt, aki az első feladatot nem oldotta meg?**

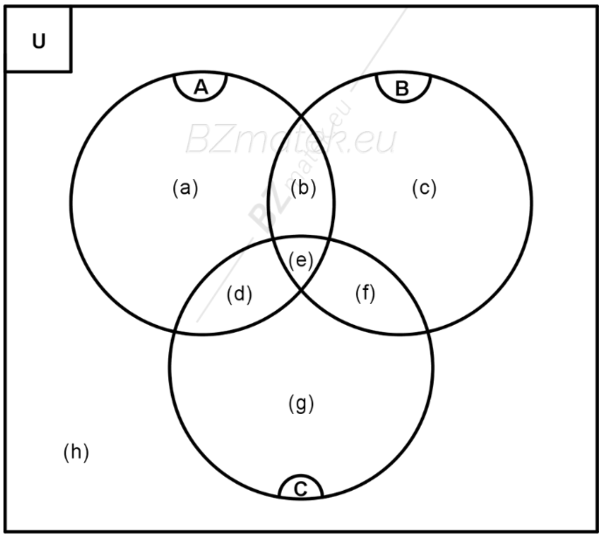
b) **Hány olyan versenyző volt, aki mindhárom feladatot megoldotta?**

c) **Ha azt is tudjuk, hogy 60 olyan diák volt, aki csak az első, és 50 olyan diák volt, aki csak a második feladatot oldotta meg, akkor hányan voltak azok, akik csak a harmadik feladatott oldották meg?**

Megoldás:
Tekintsük a következő három halmazt:

$A = \{elsőt\ megoldók\}$ $\quad B = \{másodikat\ megoldók\}$ $\quad C = \{harmadikat\ megoldók\}$

Jelöljük el a halmazábra tartományait a következőképpen:



A feladat szövegének segítségével felírhatjuk a következőket:

$(a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f) + (g) + (h) = 184$ $\qquad (b) + (c) + (e) + (f) = 80$

$(h) = 0$ $\qquad (d) + (e) + (f) + (g) = 50$

$(a) + (b) + (c) + (d) = 90$ $\qquad (b) + (d) + (f) = 32$

Mivel nem tudjuk az egyes részeket biztosan kitölteni, ezért belülről kifelé haladva legyen az $(5) = x$. Ekkor még mindig nem tudunk újabb tartományt kitölteni, így legyen $(2) = y$, s mivel így is kevés az adat, ezért legyen $(4) = z$. Ezután már a megadott információkkal ki tudjuk tölteni az üresen maradt tartományokat.

A tartományok kitölthetők a következő sorrendben:

$(b) + (d) + (e) = 32 \quad \rightarrow \quad (e) = 32 - y - z$

$(a) + (b) + (d) + (e) = 90 \quad \rightarrow \quad (a) = 90 - x - y - z$

$(b) + (c) + (e) + (f) = 80 \quad \rightarrow \quad (c) = 48 - x + z$

$(d) + (e) + (f) + (g) = 50 \quad \rightarrow \quad (g) = 18 - x + y$

$(a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f) + (g) + (h) = 184 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad (e) = 2$

Ezt követően a c kérdés segítségével tudjuk a következőket is: $(a) = 60$ és $(c) = 50$.

Ezeket vessük össze az előzőkkel:

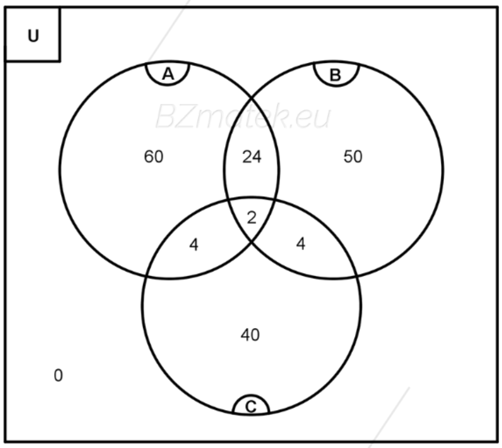
$50 = 48 + z - 2 \quad \rightarrow \quad z = 4 \quad \rightarrow \quad (d) = 4$

$60 = 90 - 2 - y - 4 \quad \rightarrow \quad y = 24 \quad \rightarrow \quad (b) = 24$

$(f) = 32 - 24 - 4 = 4$

$(g) = 18 - 2 + 24 = 40$

A helyesen kitöltött Venn – diagramm:



Ezek alapján a megoldások:

a) Mivel az első feladatot 90 - en oldották meg és összesen 184 diák versenyzett, így 94 diák nem oldotta meg az első feladatot.

b) $(e) = 2$, vagyis mindhárom feladatot 2 versenyző oldotta meg.

c) $(g) = 40$, vagyis csak a harmadik feladatot 40 diák oldotta meg.

54. Határozd meg az $A \times B$, a $C \times B$ és a $C \times C$ halmazokat, ha $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{1; 4; 5\}$ és $C = \{2; 7\}$! Mennyi eleme van az $A \times A$, a $B \times A$ és az $A \times C$ halmazoknak?

<u>Megoldás:</u>
A halmazok Descartes – szorzatai a következő elempárokból állnak:

$A \times B = \{(0; 1), (0; 4), (0; 5), (1; 1), (1; 4), (1; 5), (2; 1), (2; 4), (2; 5)\}$

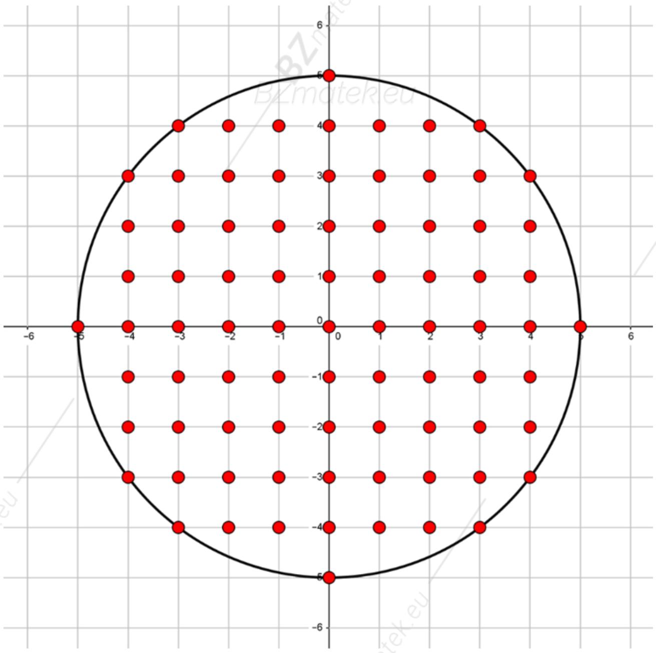
$C \times B = \{(2; 1), (2; 4), (2; 5), (7; 1), (7; 4), (7; 5)\}$

$C \times C = \{(2; 2), (2; 7), (7; 2), (7; 7)\}$

Az $|A \times A| = 3 \cdot 3 = 9$, a $|B \times A| = 3 \cdot 3 = 9$ és az $|A \times C| = 3 \cdot 2 = 6$.

55. Legyen az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon értelmezve a következő ponthalmaz: $P = \{origó\ középpontú, 5\ sugarú\ zárt\ körlap\}$. Hány elemű a $P \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ halmaz? Mennyi az eleme, ha a körlap nyílt?

<u>Megoldás:</u>
Ábrázoljuk derékszögű koordináta – rendszerben a P halmazt:



A $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halmaznak azok a pontok felelnek meg, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.

Ezek alapján a megoldás: zárt körlap esetén 81, nyílt körlapnál pedig 69.

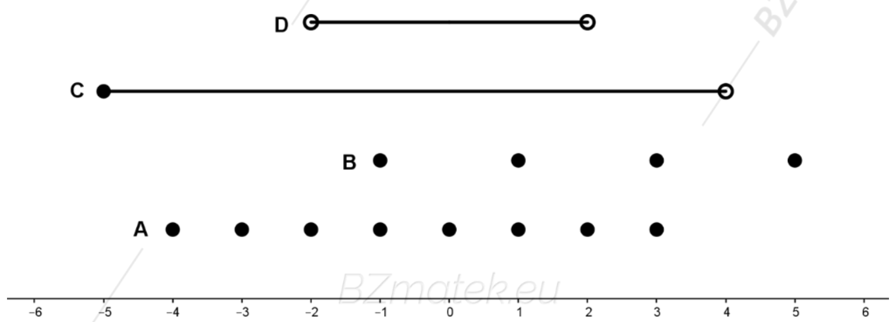
56. Ábrázold számegyenesen a következő számhalmazokat!

$\boldsymbol{A = \{x \mid -5 < x \leq 3;\, x \in \mathbb{Z}\}}$ $\boldsymbol{B = \{2x + 3 \mid -2 \leq x \leq 1;\, x \in \mathbb{Z}\}}$

$\boldsymbol{C = \{3x - 2 \mid -1 \leq x < 2;\, x \in \mathbb{R}\}}$ $\boldsymbol{D = \{x \mid 2 > |x|;\, x \in \mathbb{R}\}}$

Igaz – e, hogy a $\boldsymbol{B \setminus A}$ halmaz elemeinek a száma véges?

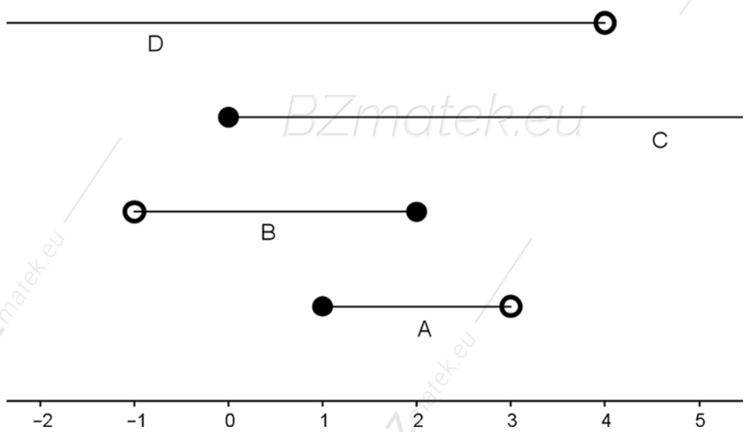
<u>Megoldás:</u>
Az x – ek helyére helyettesítsünk az adott feltételeknek megfelelő számokat:



Ezek alapján a megoldás: $B \setminus A = \{5\}$, vagyis az elemek száma véges.

57. Tekintsük a következő intervallumokat: $\boldsymbol{A = [1; 3[}$, $\boldsymbol{B =]-1; 2]}$, $\boldsymbol{C = [0; +\infty[}$, $\boldsymbol{D =]-\infty; 4[}$. Határozd meg a következő intervallumokat: $\boldsymbol{C \cup D}$, $\boldsymbol{A \setminus C}$, $\boldsymbol{D \setminus C}$, $\boldsymbol{B \cap C}$!

<u>Megoldás:</u>
Először ábrázoljuk számegyenesen az intervallumokat.



Az ábrán a teli karika jelöli az intervallum zárt részét és az üres karika a nyílt részét.

Ezek alapján a megoldások:

$C \cup D =]-\infty; +\infty[$ $A \setminus C = \emptyset$ $D \setminus C =]-\infty; 0[$ $B \cap C = [0; 2]$

58. Ábrázold derékszögű koordináta – rendszerben azon pontok halmazát, amelyek

a) **az x – tengelytől nagyobb, mint 3 egység távolságra vannak!**

b) **az y – tengelytől legfeljebb 4 egység távolságra vannak!**

c) **a $P\ (3; 0)$ ponttól kisebb, mint 2 egység távolságra vannak!**

d) **a $Q\ (5; 0)$ ponttól legalább 1 egység távolságra vannak!**

e) **a $P\ (3; 0)$ ponthoz közelebb vannak, mint a $Q\ (5; 0)$ ponthoz!**

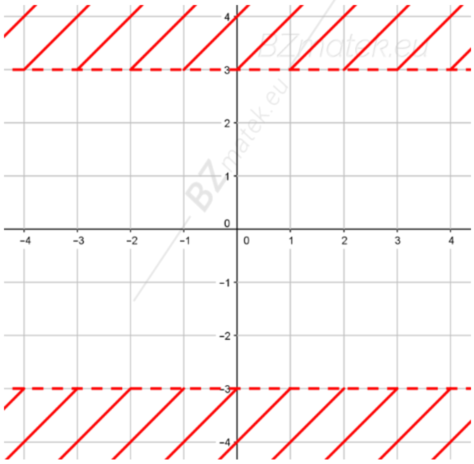
f) **az x és y tengelytől is egyenlő távolságra vannak!**

Megoldás:

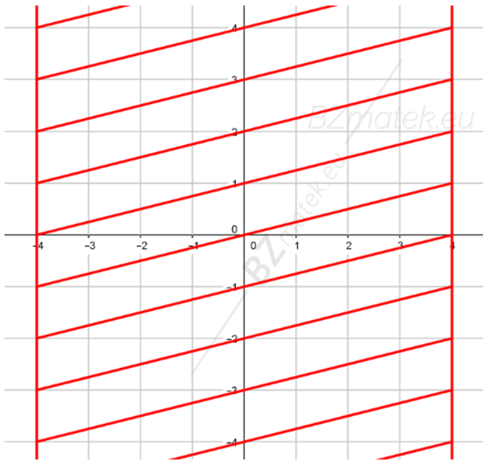
Az ábrázolások során amennyiben a határoló vonal beletartozik a ponthalmazba, akkor azt folyamatos vonallal jelöljük, ha pedig nem része a ponthalmaznak, akkor szaggatott vonallal.

Ezek alapján a megoldások:

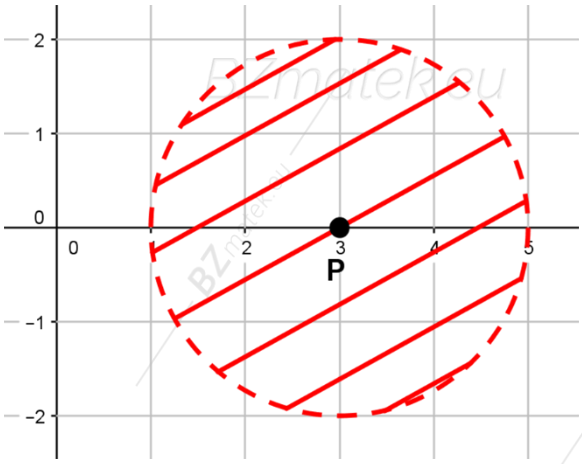
a)



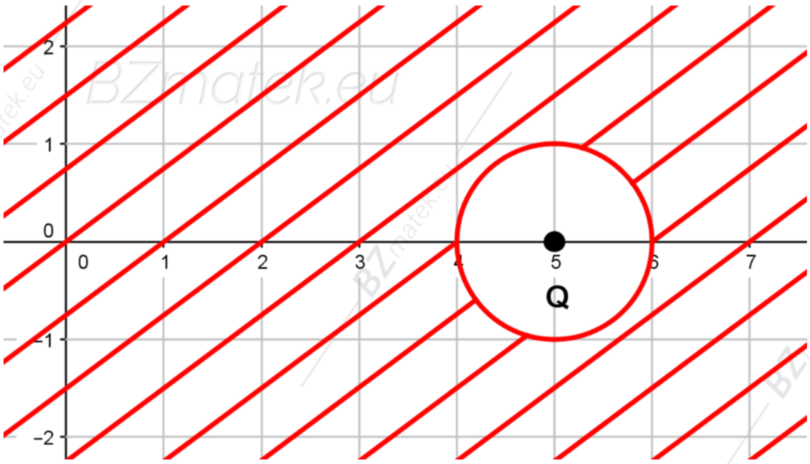
b)



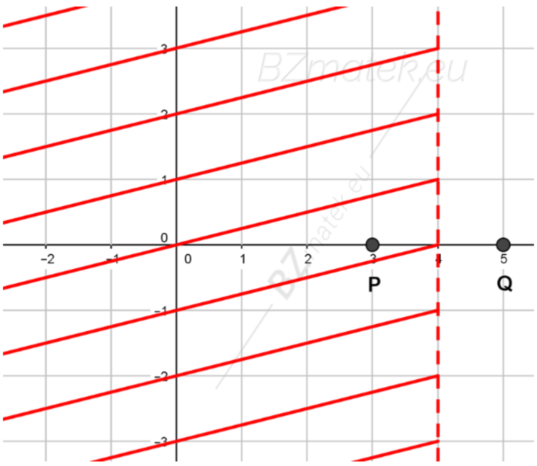
c)



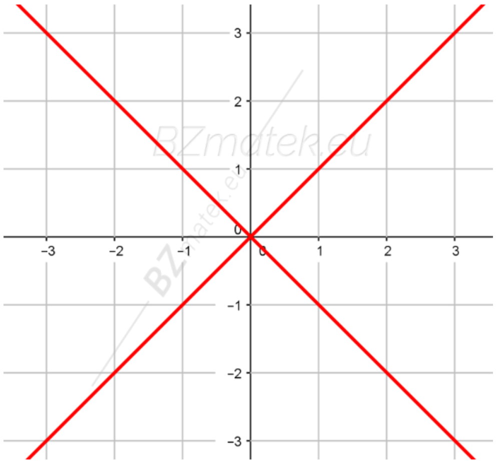
d)



e)

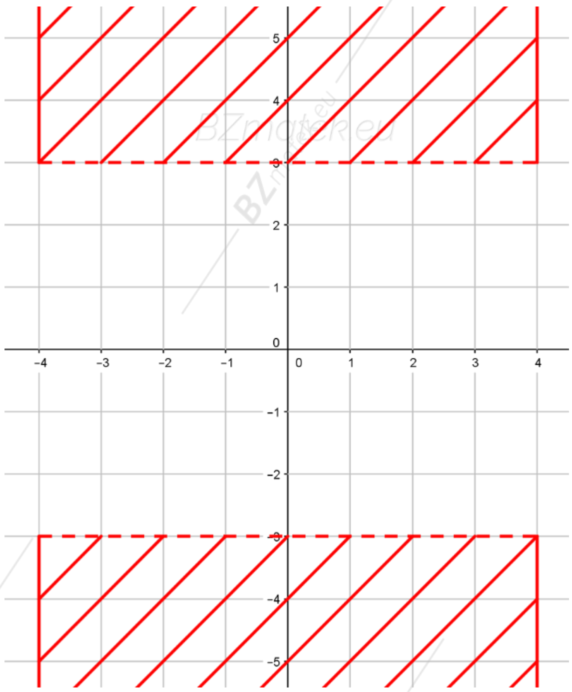


f)



59. Ábrázold az előző feladat a) és b) részében szereplő ponthalmaz metszetét!

Megoldás:



60. Adottak az $I_n =]0; n]$ intervallumok, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$. Található – e közöttük halmaz - részhalmaz párok? Írd fel intervallummal az $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \ldots$, illetve az $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$ halmazt!

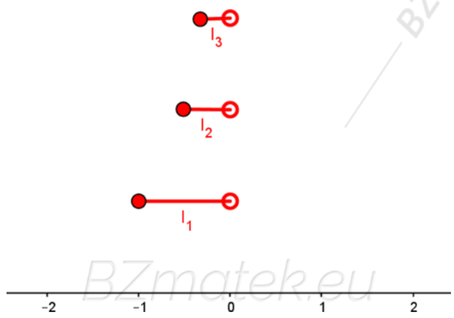
Megoldás:
Minden nagyobb indexű intervallumnak részhalmaza egy kisebb indexű: $I_x \subseteq I_y$ $(x < y)$.

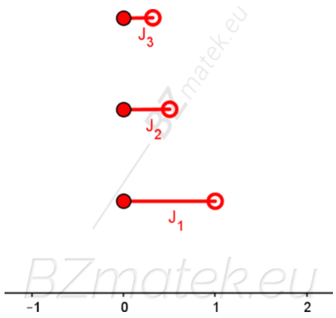
Ezek alapján a megoldások: $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \ldots =]0; 1]$ és $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots =]0; +\infty[$.

61. Adottak az $I_n = \left[-\frac{1}{n}; 0\right[$ és $J_n = \left\{x | 0 \leq x < \frac{1}{n}\right\}$ halmazok ($n = 1, 2, \ldots$). Van – e olyan pontja a számegyenesnek, amely minden I_n, illetve J_n halmaznak eleme?

Megoldás:
Írjuk fel a J_n halmazokat intervallum jelöléssel: $J_n = \left[0; \frac{1}{n}\right[$.

Ábrázoljuk számegyenesen az I_n, illetve J_n halmazokat:





Ezek alapján a megoldás: az I_n halmazoknak nincs közös eleme, míg a J_n intervallumoknak egyetlen közös eleme a 0.

62. Bizonyítsd be, hogy pontosan annyi páros szám van, mint természetes szám!

Megoldás:
Rendeljük hozzá minden természetes számhoz a kétszeresét: $x \longmapsto 2x$. Így egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hoztunk létre a halmazok között, vagyis a számosságuk megegyezik.

63. Adott egy szálloda, melyben végtelen sok szoba található (a számozásuk 1 – től kezdődik). A hét egyik napján a szállodában teltház van. A recepciós a hangosbemondón keresztül mire kérje a már megszállt vendégeket, ha

a) **érkezik még egy 4 fős társaság?**

b) **érkezik egy végtelen sok üléssel rendelkező, megtelt busz?**

c) **érkezik még végtelen sok végtelen üléssel rendelkező, megtelt busz?**

d) **éjszaka érkeznek még véges sokan (előre nem tudják mennyien), s ők mindenképpen egymás mellett szeretnének lakni?**

Megoldás:
Minden szituációban el lehet szállásolni az újonnan érkezőket a következőképpen:

a) Meg kell kérni a korábban elszállásolt vendégeket, hogy költözzenek át a jelenlegi szobaszámuknál 4 - gyel nagyobb számú szobákba. Ekkor az első 4 üresen maradat szobába elfoglalhatják helyüket a társaság tagjai.

b) Meg kell kérni a korábban elszállásolt vendégeket, hogy költözzenek át a jelenlegi szobaszámuknak dupláját viselő szobákba. Ekkor a páratlan sorszámú szobák üresen maradnak, s az érkező busz utasai a következő szabály szerint foglalhatják el helyüket: az első ülésen ülő az 1 – es szobába, a második ülésen ülő a 3 – as szobába, és így tovább.

c) Meg kell kérni a korábban elszállásolt vendégeket, hogy költözzenek át a jelenlegi szobaszámuknak dupláját viselő szobákba. Ekkor a páratlan sorszámú szobák üresen maradnak, s az érkező busz utasai a következő szabály szerint foglalhatják el helyüket: az első busz utasai a 3^n számú szobákba, a második busz utasai az 5^n számú szobákba, a harmadik busz utasai a 7^n számú szobákba, a negyedik busz utasai a 11^n számú szobákba, és így tovább: az i – edik busz utasai a ${p_i}^n$ számú szobákba, ahol p_i az $i + 1$ – edik prímszám, n pedig a busz ülésének száma. Mivel a különböző páratlan prímszámok hatványai mindig különböző páratlan számok, így nem lesz ütközés a most érkező vendégek között sem, sőt még maradnak üres szobák is.

d) Meg kell kérni a korábban elszállásolt vendégeket, hogy költözzenek át abba a szobába, amelynek számát 2 hatványaként kapják úgy, hogy a kitevő a jelenlegi szobájuknak a száma (az n – edik szobában lakó költözzön át a 2^n sorszámú szobába). Mivel a 2 hatványai között tetszőlegesen nagy hézagok találhatóak, így könnyen elfoglalhatják helyüket egymás mellett az éjszaka érkezők. (Egy másik megoldás lehet az is, hogy az n – edik szobában lakó átköltözik az n – edik prímszám sorszámú szobába.)