Kombinatorika

Modulok:
A kombinatorikai feladatok megoldásához három modult használunk:

- Permutáció (Sorba rendezés)
- Kombináció (Kiválasztás)
- Variáció (Kiválasztás és sorba rendezés)

DEFINÍCIÓ: (Ismétlés nélküli permutáció)
Az n különböző elem egy ismétlés nélküli permutációján az n elem egy sorba rendezését értjük.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes ismétlés nélküli permutációjának száma: $P_n = n!$ (n faktoriális).

Megjegyzés:

- *Az n faktoriális felbontása:* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.
- $0! = 1$
- *Ha az n különböző elemet egy kör mentén rendezzük sorba, akkor ciklikus permutációról beszélünk, s ezek száma:* $P_n^{ciklikus} = (n-1)!$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétléses permutáció)
Azon n elem egy sorba rendezését, melyek között ismétlődő elemek is előfordulnak, az n elem egy ismétléses permutációjának nevezzük.

TÉTEL:
Ha az n elem között a megegyező elemek száma $k_1, k_2, \ldots, k_l$ $(k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n)$, akkor az n elem összes ismétléses permutációjának száma: $P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_l} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétlés nélküli kombináció)
Ha n különböző elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy egy elemet csak egyszer választhatunk ki és a sorrend a kiválasztás során nem számít, akkor az n elem k tagú ($0 \le k \le n$ egészek) ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétlés nélküli kombinációinak száma: $C_n^k = \binom{n}{k}$ („n alatt a k”).

Megjegyzés:
Az „n alatt a k” binomiális együttható felbontása: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétléses kombináció)
Ha n különböző elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk és a sorrend a kiválasztás során nem számít, akkor az n elem k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétléses kombinációját kapjuk.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétléses kombinációinak száma: $C_n^{k,ism} = \binom{n+k-1}{k}$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétlés nélküli variáció)
Ha n különböző elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy egy elemet csak egyszer választhatunk ki és a sorrend a kiválasztás során számít, akkor az n elem egy k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétlés nélküli variációját kapjuk.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétlés nélküli variációinak száma: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétléses variáció)
Ha n különböző elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk és a sorrend a kiválasztás során számít, akkor az n elem egy k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétléses variációját kapjuk.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ismétléses variációinak száma: $V_n^{k,ism} = n^k$.

Megjegyzés:
Az ismétléses variáció esetében már a $k > n$ *is lehetséges.*

A binomiális együtthatók tulajdonságai:

- Minden binomiális együttható egy természetes számmal egyenlő.
- Szimmetrikusság: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{1}{1} = 1; \binom{2}{2} = 1; \ldots \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{0}{0} = 1; \binom{1}{0} = 1; \ldots; \binom{n}{1} = 1$
- $\binom{1}{1} = 1; \binom{2}{1} = 2; \ldots; \binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- Az n elemű halmaz részhalmazainak száma: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

Megjegyzés:
A Pascal – háromszög és a binomiális együtthatók kapcsolata: az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható a Pascal – háromszög n – edik sorának k – adik eleme.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

TÉTEL: (Binomiális – tétel)

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{1} \cdot a^1 b^{n-1} + \binom{n}{0} \cdot a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Kombinatorikus feladatok megoldása:

- A feladatok megoldása során el kell döntenünk, hogy sorba rendezésről, illetve kiválasztásról van - e szó. Amennyiben kiválasztásról, akkor azt kell megvizsgálnunk, hogy a kiválasztás során számít - e a kiválasztott elemek sorrendje, vagy sem. Ezek alapján eldönthetjük, hogy a fenti képletek közül melyikkel oldhatjuk meg a feladatokat.
- Amennyiben egy feladatot több, egymástól független ágra bontunk (esetszétválasztással), akkor először kiszámoljuk az egyes esetek lehetséges értékeit, majd végül ezeket összeadjuk.
- Egy kérdésre megkaphatjuk a megoldást úgy is, ha kiszámítjuk az összes lehetséges eset számát, majd kivesszük a kérdésnek nem megfelelő (számunkra kedvezőtlen) esetek számát.
- A permutáció, illetve variáció esetében (szemléltetésképpen) alkalmazhatjuk a rekeszes módszert is.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) Egyszerűsítsd a következő törteket!** $\frac{77!}{3!\cdot 74!}$ $\frac{n!}{(n-2)!}$ $\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$

2. **(K) Hány tízjegyű szám van a kettes számrendszerben?**

3. **(K) Hányféleképpen érkezhet be a célba 5 versenyző, ha nincs holtverseny?**

4. **(K) Hányféleképpen ülhet le 4 ember egy kör alakú asztalhoz?**

5. **(K) Hányféleképpen rakhatunk sorba 3 kék, 4 zöld és 1 piros labdát?**

6. **(K) Mennyi különböző dobássorozat lehetséges, amiben 3 fej és 5 írás található?**

7. **(K) Hány (nem feltétlenül értelmes) 7 betűs szó képezhető az A, A, A, B, B, C, D betűkből?**

8. **(K) Hányféleképpen sorsolhatunk ki 20 ember között 1 Tv - t, 1 kerékpárt és 1 autót, ha egy ember több tárgyat is nyerhet?**

9. **(K) Mennyi 3 színű zászlót készíthetünk 5 különböző színből, ha egy színt csak egyszer használhatunk fel?**

10. **(K) Mennyi háromjegyű szám képezhető az $1, 2, 3, 4$ számokból, ha a számjegyek ismétlődhetnek?**

11. **(K) Egy pályázatra 20 pályamunka érkezett és 5 kategóriában hirdetnek $1-1$ győztest. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha egy pályamunka csak egy kategóriában győzhet?**

12. **(K) Egy futóverseny döntőjébe 8 - an jutnak be. Hányféleképpen alakulhat a dobogó, ha nincs holtverseny?**

13. (K) Egy 7 elemű halmaznak mennyi 3 elemű részhalmaza van?

14. (K) Hányféleképpen tölthetjük ki az ötös lottó szelvényt? (90 számból húznak 5 - öt)?

15. (E) Egy 32 - es létszámú osztályban klubdélutánt rendeznek, ahol a tanulók között négy ugyanolyan tombolatárgyat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha egy tanuló több tárgyat is elnyerhet?

16. (K) Adott a síkon 15 pont, melyek közül semelyik 3 nem illeszkedik egy egyenesre. A 15 pont mennyi háromszöget határozhat meg?

17. (K) Hányféleképpen sorsolhatunk ki 10 diák között 5 német, 3 francia és 2 holland utat, ha egy diák csak egy utat kaphat?

18. (K) Hány ötszöget határoznak meg egy szabályos 20 – szög csúcsai?

19. (E) Egy pizzériában 6 – féle hamburgert árulnak, mindegyiket $1000\,Ft$ – ért. Hányféleképpen költhetünk el $10\,000\,Ft$ – ot hamburgerre, ha nemcsak egyféle hamburgert szeretnénk hazavinni?

20. (K) Hány részhalmaza van egy 4 elemű halmaznak?

21. (K) Egy kutyakiállításra 10 - en neveztek be egy – egy kutyával. Hányféleképpen állhatnak sorba, ha két kutya nem kerülhet egymás mellé?

22. (K) Hányféleképpen állhat osztályfőnöke előtt kettesével egy oszlopban a 18 fiúból és 18 lányból álló osztály, ha két fiú és két lány nem kerülhet egymás mellé?

23. (K) Van 2 különböző könyvünk matematikából, 3 történelemből és 4 magyarból. Hányféleképpen helyezhetjük el ezeket a polcon, ha az egyforma témájú könyveket egymás mellé szeretnénk elhelyezni?

24. (K) Három házaspár színházba ment és egymás mellé vettek jegyet. Hányféleképpen ülhetnek le, ha a házastársak egymás mellett foglalnak helyet?

25. (K) Egy csoportba 7 fiú és 7 lány jár. Felsorakoztatjuk őket kettes oszlopba, egyik oszlopba a lányok, másikba a fiúk állnak. Hányféleképpen állhatnak párba?

26. (K) Moziba megy 4 fiú (Attila, Csaba, Elemér, Géza) és 4 lány (Bea, Dia, Flóra, Helga). Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha

a) **fiúk és lányok felváltva ülnek?**

b) **Attila és Bea egymás mellé szeretne ülni?**

c) **Attila, Csaba és Elemér egymás mellé szeretne ülni?**

d) **Attila a Bea mellé, Csaba a Dia mellé szeretne ülni?**

e) **Dia és Géza nem szeretne egymás mellé ülni?**

f) **Helga nem szeretne az első helyen ülni?**

g) **a 4 lány egymás mellé szeretne ülni?**

27. (K) Egy házaspár 3 baráttal hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz, ha a házaspár egymás mellett szeretne helyet foglalni?

28. (K) Egy kör alakú asztalhoz leül 5 házaspár.

a) **Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a párosok egymás mellé szeretnének ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?**

b) **Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni?**

29. (K) A 6 - os lottón (45 számból húzunk le 6 - ot) hányféleképpen lehet 4 találatunk?

30. (K) Egy pályázatra 30 pályamű érkezett, melyet 18 férfi és 12 nő adott be. A díjazáskor 1 darab első, 2 darab második és 3 darab harmadik helyezettet állapítanak meg.

a) **Hányféleképpen történhet a díjazás, ha egy ember csak egy díjat nyerhet?**

b) **Hányféleképpen történhet a díjazás, ha az első és két második helyezett is nő?**

31. (K) A BKV járművein a jegyeken 9 mező található 1 - től 9 - ig számozva. A lyukasztókat úgy állítják be, hogy 2, 3 vagy 4 mezőt lyukasszanak ki. Hányféleképpen állíthatják be a lyukasztókat?

32. (K) Egy 12 fős katonai osztagból 4 irányba küldenek járőröket. Egy járőregyüttest 2 katona alkot. Hány lehetőség van a járőrök kiválasztására?

33. (K) Egy fővárosi, egy debreceni és egy külföldi barátunknak szeretnénk két – két képeslapot küldeni úgy, hogy egyikük se kapjon két egyforma lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha az újságárusnál összesen 7 – féle képeslap kapható?

34. (K) Egy 34 fős (21 fiú és 13 lány) osztályt 5 diák képvisel egy ünnepségen.

***a)* Hányféleképpen választhatják ki az 5 tagú küldöttséget a tanulók?**

***b)* Hányféleképpen választhatnak ki egy 3 fiúból és 2 lányból álló küldöttséget?**

35. (K) Egy 18 fős csoport kirándulni megy és 6 ágyas szobákban szállnak meg. Hányféleképpen foglalhatják el a szobákat, ha a szobák különbözőek? (A szobákon belüli elhelyezkedésekre nem vagyunk tekintettel.)

36. (K) Egy raktárban 100 darab készülékből 8 darab hibás. Hányféleképpen lehet 6 készüléket kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott készülékek között

***a)* ne legyen egy hibás sem?**

***b)* mind hibás legyen?**

***c)* legalább 4 hibás legyen?**

***d)* legfeljebb 5 hibás legyen?**

37. (K) Egy dobozban 30 csavar közül 10 selejtes. A 30 csavarból 7 - et kivéve, hány esetben lesz közöttük

***a)* legalább 6 selejtes?**

***b)* legfeljebb 5 selejtes?**

38. (K) Hány különböző módon tudunk egy 20 fős társaságból két 8 fős csapatot létrehozni, akik focimeccset játszanak egymás ellen? (A csapatban betöltött pozíció nem számít.)

39. (K) Egy dobozban 15 cédula van, amelyekre rendre az $1, 2, \ldots, 14, 15$ számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után 5 cédulát visszatevés nélkül.

***a)* Hány olyan eset adódhat, amelyben a számok növekvő sorrendben vannak?**

***b)* Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 5 - nél?**

40. (K) Hányféleképpen rakhatunk le egymás mellé 5 piros és 8 kék golyót úgy, hogy 2 piros golyó nem kerülhet egymás mellé?

41. (K) Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye páros?

42. (K) Egy dobókockával háromszor dobunk, s az eredményeket leírjuk egymás mellé.

a) **Mennyi háromjegyű számot kaphatunk?**

b) **Mennyi háromjegyű, páros számot kaphatunk?**

c) **Mennyi háromjegyű, néggyel osztható számot kaphatunk?**

d) **Mennyi háromjegyű, 9 - cel osztható számot kaphatunk?**

43. (K) A bohémiai útlevelet 2 betűvel és 5 számmal jelölnek. Az első szám jelzi, hogy férfi vagy nő a tulajdonos, a második szám pedig azt, hogy a 7 tartományból melyikben él. Hány útlevelet adhattak ki összesen, ha 20 betűt használtak fel hozzájuk?

44. (K) Mennyi ötjegyű szám képezhető a $0, 1, 2, 3, 4$ számokból, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek?

45. (K) Az $1, 2, \ldots, 14, 15$ számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben

a) **az $1, 2, 3$ számok csökkenő sorrendben kerülnek egymás mellé?**

b) **az $1, 2, \ldots, 9, 10$ számok egymás mellé kerülnek?**

46. (K) Mennyi ötjegyű szám képezhető a $0, 1, 2$ számjegyekből?

47. (K) Mennyi négyjegyű 5 - tel osztható számot képezhetünk a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ számjegyekből, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

48. (K) Az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyekből mennyi háromjegyű szám képezhető, amelyben szerepel legalább egy darab 5 - ös?

49. (K) A 4 - es és 5 - ös számjegyek felhasználásával hány 9 - cel osztható, nyolcjegyű páros szám készíthető?

50. (K) Az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekből hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben mindhárom páratlan számjegy szerepel legalább egyszer?

51. (K) Mennyi nyolcjegyű, néggyel osztható számot képezhetünk a $0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2$ számjegyekből, ha egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel?

52. (K) Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke?

53. (E) Hány olyan 9 jegyű szám van, amelyben bármely két szomszédos számjegy szorzata prímszám?

54. (K) Egy 25 tagú közösség 3 tagú vezetőséget választ: titkárt és két titkár helyettest. Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy Ági vezetőségi tag legyen?

55. (K) Egy 35 fős osztályban kisorsolunk 7 különböző könyvet. Hány olyan eset lehetséges, amikor Nagy Éva kap könyvet, ha

a) **egy tanuló csak egy könyvet kaphat?**

b) **egy tanuló több könyvet is kaphat?**

56. (K) Egy ital automata 1, illetve 2 eurós érméket fogad el. Egy 6 euró értékű italt hányféleképpen fizethetünk ki az automatához állva?

57. (K) Egy csomag magyar kártyából (4 szín, mindegyikből $8-8$ lap) kiosztunk 3 embernek $2-2$ lapot. Hány különböző kiosztás lehetséges?

58. (E) Egy csomag magyar kártyából (4 szín, mindegyikből $8-8$ lap) hányféleképpen választhatunk ki 4 lapot úgy, hogy 1 darab ász és 3 darab zöld legyen a lapok között?

59. (K) A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani

a) **5 lapot úgy, hogy a kiválasztott lapok között 2 ász és 1 király legyen?**

b) **8 lapot úgy, hogy ász és piros is legyen a kiválasztott lapok között?**

c) **8 lapot úgy, hogy legalább 1 zöld színű lap legyen a kiválasztottak között?**

60. (E) Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyából 6 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros és két király?

61. (K) Egy nyársra 6 étel darab fér fel úgy, hogy csirkemellből, szalonnából és hagymából választhatunk. Hányféleképpen állíthatjuk össze a nyársat, ha legfeljebb 3 hagymát szeretnénk rárakni? (Akár az is lehet, hogy egyféle étel lesz a nyárson.)

62. (E) Három fiú és két lány munkát keres. A városban három üzemben vesznek fel férfi munkaerőt, két bölcsőde hirdet felvételt nőknek és van még két üzlet, ahol férfiakat és nőket egyaránt alkalmaznának. Hányféleképpen helyezkedhet el az 5 fiatal, ha minden munkahelyen legalább 5 dolgozót tudnak alkalmazni?

63. (K) Három csónakot bérel 11 tanuló: egy kétülésest, egy négyülésest és egy ötülésest. A beszállás során a csónakokon belüli elhelyezkedés közömbös.

***a)* Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban?**

***b)* Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha két tanuló egy csónakba akar kerülni?**

64. (K) Két 4 fős család (2 szülő, 2 gyerek) kirándulni megy, s egy 5 és egy 4 fős sátorban éjszakáznak. Hányféleképpen tehetik meg, ha mindkét sátorban lesz $1-1$ házaspár a gyerekekkel?

65. (E) Egy háromszög oldalainak hossza egész számok, s a kerülete $7\ cm$. A háromszög oldalai piros, kék és zöld színűek, mindegyik különböző festésű. Mennyi ilyen háromszög létezik?

66. (K) Egy hegy csúcsára 6 út vezet. Két ember felmegy, majd lejön. Hányféleképpen történhet ez, ha

***a)* $1-1$ utat legfeljebb egy ember használhat és legfeljebb egyszer?**

***b)* $1-1$ út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban?**

***c)* mindegyik út mindkét irányban többször is igénybe vehető?**

67. (E) Egy filmklubban néhány film közül választanak ki 4 - et, amit majd meg fognak nézni. Hány film közül választanak, ha a választási lehetőségek száma 495?

68. (E) Egy dobozban 2 darab fehér golyó van. Hány piros golyót kell a dobozba tenni, hogy az összes golyót kiválasztva a lehetséges sorrendek száma 21 legyen?

69. (E) Hányféleképpen választhatunk ki $1-200$ között három különböző pozitív egész számot úgy, hogy az összegük osztható legyen 3 – mal?

70. (E) Két sakkozó, Anna és Bálint játszik egymás ellen a következő szabályok szerint: Minden győzelem esetén 1 pont jár a győztesnek és 0 pont a vesztesnek, míg döntetlen végeredménynél $0,5-0,5$ ponttal gazdagodnak a játékosok. Amennyiben valamelyik legfeljebb 6 játszmából több, mint 3 pontot szerez, akkor a játékot az első ilyen esetben befejezik, és az illető nyert. Ha az első hat játszma során ez nem következik be, akkor mindannyiszor két partit játszanak, míg valamelyikük több pontot szerez. Hányféleképpen jöhet létre a $3,5-2,5$ – es végeredmény?

71. (K) A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a BIOLÓGIA szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?

B	I	O	L	Ó
I	O	L	Ó	G
O	L	Ó	G	I
L	Ó	G	I	A

72. (K) A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a VONALZÓ szót, ha minden lépésnél csak balra lefele vagy jobbra lefele haladhatunk?

			V			
		O		O		
	N		N		N	
A		A		A		A
	L		L		L	
		Z		Z		
			Ó			

73. (K) A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a TÉGLALAP szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?

T	É	G	L	A	L	A	P
É	G	L	A	L	A	P	
G	L	A	L	A	P		
L	A	L	A	P			
A	L	A	P				
L	A	P					
A	P						
P							

74. (K) A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a PARALELEPIPEDON szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?

P	A	R	A	L				
A	R	A	L	E				
R	A	L	E	L				
A	L	E	L	E				
				P	I	P	E	D
				I	P	E	D	O
				P	E	D	O	N

75. (K) Hányféleképpen olvasható ki a VARIÁCIÓ szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet csak haladni?

							V							
						A	A	A						
					R	R	R	R	R					
				I	I	I	I	I	I	I				
			Á	Á	Á	Á	Á	Á	Á	Á	Á			
		C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C		
	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó	Ó

76. (E) Hányféleképpen lehet kiolvasni az FELADATGYŰJTEMÉNY szót, ha minden lépésnél csak jobbra vagy lefelé lehet haladni?

F	E	L	A	D	A	T	G	Y	Ű
E	L	A	D	A	T	G	Y	Ű	J
L	A	D	A	T	G		Ű	J	T
A	D	A	T	G	Y	Ű	J	T	E
D	A	T	G	Y	Ű	J	T	E	M
A	T	G	Y	Ű	J	T	E	M	É
T	G	Y	Ű	J	T	E	M	É	N
G	Y	Ű	J	T	E	M	É	N	Y

77. (E) Hányféleképpen olvasható ki a DEBRECENI szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet csak haladni?

				D				
			E	E	E			
		B	B	B	B	B		
	R	R	R	R	R	R	R	
E	E	E	E	E	E	E	E	E
	C	C	C	C	C	C	C	
		E	E	E	E	E		
			N	N	N			
				I				

78. (E) Mennyi (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető az ABRAKADABRA szó összes betűinek felhasználásával, ha az A betűk nem kerülhetnek egymás mellé?

79. (E) Mennyi (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a SZERENCSÉS szó összes betűinek felhasználásával, ha az E és S betűk nem kerülhetnek egymás mellé?

80. (E) Mennyi 0 – ra végződik az $200!$ értéke?

81. (E) Írd fel az $(a+2b)^4$ hatványt összeg alakban!

82. (E) Mennyi lesz az x^4 együtthatója a $(3x+2)^{10}$ kifejezésben, ha elvégezzük a hatványozást és az összevonásokat?

83. (E) Határozd meg az $\left(\frac{a}{b}-\sqrt{b}\right)^{16}$ hatvány kifejtésének középső tagját!

84. (E) Az $\left(x^2+\sqrt{x}\right)^n$ binomiális tétel szerinti kifejtésének harmadik tagja $15x^9$. Mekkora az n kitevő? Add meg a kifejezés utolsó előtti tagját!

85. (E) Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $\binom{n}{1}+\binom{n}{n-1}-\binom{n}{2}=0$

b) $C_{n+1}^4+C_n^4-2\cdot C_n^2=0$

c) $V_n^{5,ism}+V_n^{4,ism}=72\cdot V_n^{3,ism}$

86. (E) Igazold a következő összefüggést: $\binom{10}{6}+\binom{10}{7}=\binom{11}{7}$!

87. (E) Bizonyítsd be a következő azonosságot: $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(8) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(9) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(10) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(11) Saját anyagok