MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉPSZINT

Függvények

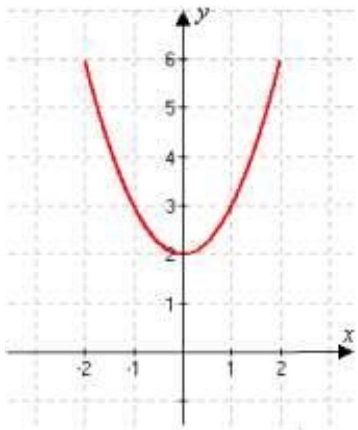
A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Az ábrán egy $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)

a) $x \mapsto x^2 - 2$

b) $x \mapsto x^2 + 2$

c) $x \mapsto (x+2)^2$



Megoldás:

b) Az x^2 függvény képét eltoljuk az y tengely mentén két egységgel fölfelé, így az $x \mapsto x^2 + 2$ függvény képét kapjuk. (2 pont)

2) Határozza meg az 1. feladatban megadott, $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény értékkészletét! (3 pont)

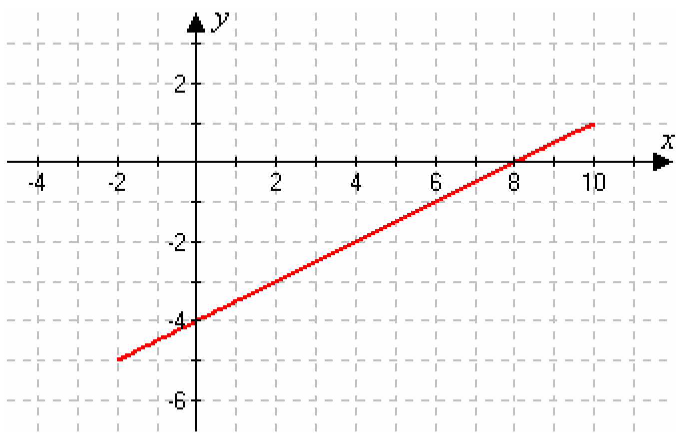
Megoldás:

Az értékkészlet a felvett függvényértékek halmaza. $2 \le f(x) \le 6$ vagy $[2;6]$

(3pont)

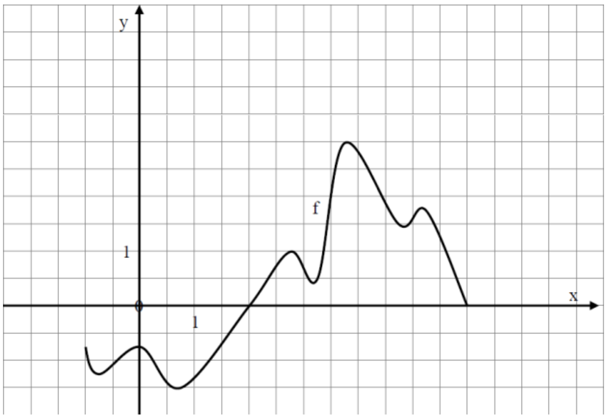
3) Ábrázolja az $f(x) = 0,5x - 4$ függvényt a $[-2;10]$ intervallumon! (2 pont)

Megoldás:



(2 pont)

4) A $[-1;6]$-on értelmezett $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályát a grafikonjával adtuk meg. Határozza meg az $f(x)>0$ egyenlőtlenség megoldását! Adja meg $f(x)$ legnagyobb értékét! **(3 pont)**



Megoldás:

$2 \le x \le 6$ (2 pont)

$f(x)$ legnagyobb értéke: **3** (1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Az f és g függvényeket a valós számok halmazán értelmezzük a következő képletek szerint: $f(x)=(x+1)^2-2$; $g(x)=-x-1$

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az f függvényt! (Az ábrán szerepeljen a grafikonnak legalább a $-3,5 \le x \le 1$ intervallumhoz tartozó része.) **(4 pont)**

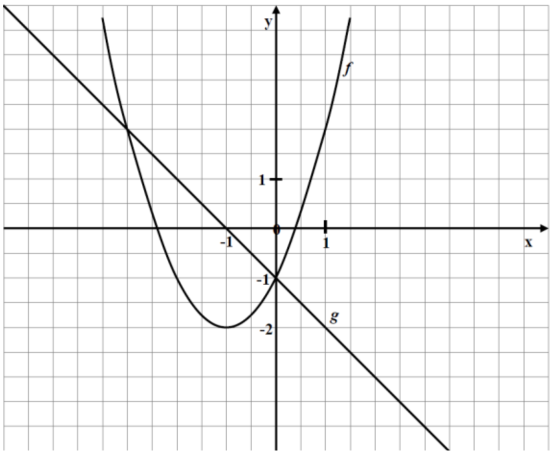
b) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben a g függvényt! **(2 pont)**

c) Oldja meg az $(x+1)^2-2 \le -x-1$ egyenlőtlenséget! **(6 pont)**

Megoldás:

a) $f(x)$ ábrázolása (4 pont)

b)



(2 pont)

c) $(x+1)^2-2+x+1 \le 0$ (1 pont)

$x^2+3x\leq 0$ (1 pont)

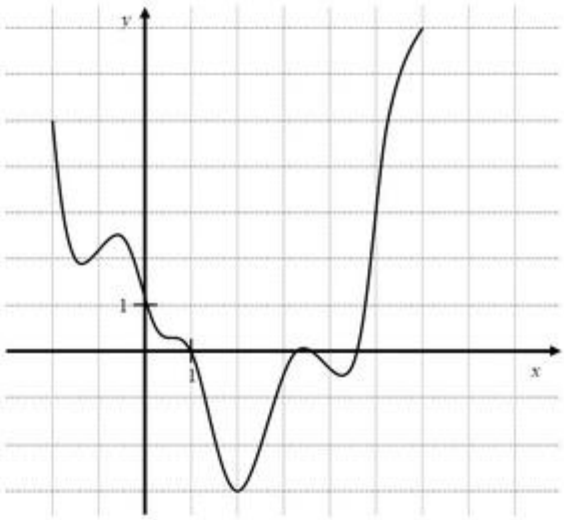
Az egyenlőség teljesül, ha $x_1=-3$ vagy $x_2=0$. (2 pont)

A megoldás: $\mathbf{-3\leq x\leq 0}$ (2 pont)

A feladat grafikusan is megoldható.

Összesen: 12 pont

6) Az f függvényt a $[-2;6]$ intervallumon a grafikonjával értelmeztük. Mekkora f legkisebb, illetve legnagyobb értéke? Milyen x értékekhez tartoznak ezek a szélsőértékek? (4 pont)



Megoldás:

f legkisebb értéke -3. (1 pont)

Ez az $x=2$ értékhez tartozik. (1 pont)

f legnagyobb értéke 7. (1 pont)

Ez az $x=6$ értékhez tartozik. (1 pont)

Összesen: 4 pont

7) Adott a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 2\lg(y+1)&=\lg(x+11)\\ y&=2x \end{aligned}\right\}$$

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)

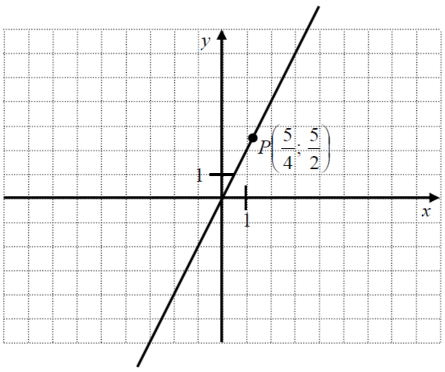
b) Milyen x, illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)

c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)

d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)

Megoldás:

a)



(2 pont)

b) Az (1) egyenlet miatt $\boldsymbol{y > -1}$ (1 pont)
és $\boldsymbol{x > -11}$ (1 pont)

c) $\lg(y+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)

$\lg(2x+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt (1 pont)

$(2x+1)^2 = (x+11)$ (1 pont)

$4x^2 + 3x - 10 = 0$ (2 pont)

$x_1 = \frac{5}{4}$ és $x_2 = -2$ (1 pont)

$y_1 = \frac{5}{2}$ és $y_2 = -4$ (1 pont)

A másodfokú egyenletrendszer megoldásai: $\left(\boldsymbol{\frac{5}{4}; \frac{5}{2}}\right)$ illetve $(-2; -4)$ (1 pont)

amiből a második számpár nem tartozik az eredeti egyenlet értelmezési tartományába, (1 pont)
az első számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert. (1 pont)

d) **A** $\left(\boldsymbol{\frac{5}{4}; \frac{5}{2}}\right)$ **pont bejelölése.** (2 pont)

Összesen: 17 pont

8) Adja meg az $\boldsymbol{5x - 3y = 2}$ egyenletű egyenes és az $\boldsymbol{y}$ tengely metszéspontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

A metszéspont: $\left(\boldsymbol{0; -\frac{2}{3}}\right)$ (2 pont)

9)

a) Ábrázolja a $[-2;4]$-on értelmezett, $\boldsymbol{x \to (x-1{,}5)^2 + 0{,}75}$ hozzárendeléssel megadott függvényt! (2 pont)

b) Állapítsa meg a fenti függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

c) Oldja meg a valós számok halmazán a $\boldsymbol{\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 - 2x}$ egyenletet! (8 pont)

Megoldás:

a) Ábrázolás (2 pont)

b) A minimum helye: $\boldsymbol{x = 1{,}5}$ (1 pont)

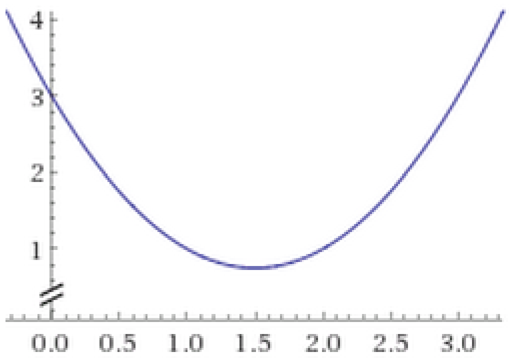
Értéke: **0,75** (1 pont)

c) Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$x^2 - 3x + 3 = 1 - 4x + 4x^2$ (2 pont)

Rendezve $3x^2 - x - 2 = 0$ (1 pont)

Gyökei: $x_1 = 1$ illetve $x_2 = -\frac{2}{3}$ (2 pont)



De $x_1 = 1$ nem megoldás (nem teszi igazzá az eredeti egyenletet) (1 pont)

Az $x = -\frac{2}{3}$ esetén mindkét oldal értéke $\frac{7}{3}$, ezért ez megfelelő valós gyök. (2 pont)

Összesen: 12 pont

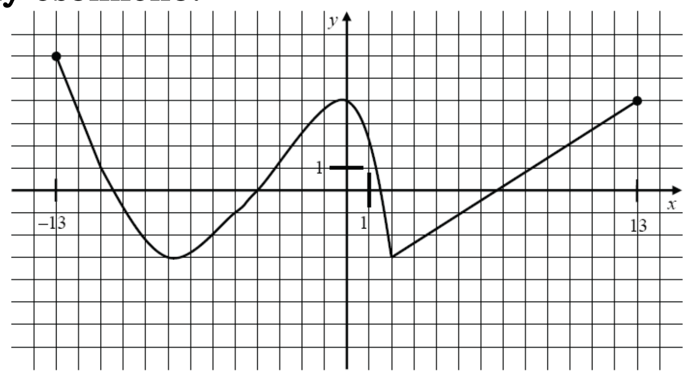
10) A valós számok halmazán értelmezett $x \to -(x-1)^2 + 4$ függvénynek minimuma vagy maximuma van? Adja meg a szélsőérték helyét és értékét! (3 pont)

Megoldás:

Maximuma van, (1 pont)
szélsőérték helye: **1**; (1 pont)
értéke: **4**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Adjon meg egy olyan zárt intervallumot, ahol a grafikonjával megadott alábbi függvény csökkenő! (2 pont)



Megoldás:

Például: $[0;2]$ **vagy** $[-13;-8]$ (2 pont)

12) Adott az $f: \mathbb{R}^- \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-x}$ függvény. Határozza meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyhez tartozó függvényérték 4. (2 pont)

Megoldás:

$x = -16$ (2 pont)

13) Adja meg a $[-2;3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2 + 1$ függvény értékkészletét! (3 pont)

Megoldás:

A függvény legkisebb értéke az 1, (1 pont)
az adott intervallum végpontjaiban a függvény értéke 5, illetve 10, (1 pont)
a függvény értékkészlete az $[1;10]$ intervallum. (1 pont)

Összesen: 3 pont

14) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett az $x \mapsto x^2 - 5x$ másodfokú függvény zérushelyeit! Számítsa ki a függvény helyettesítési értékét az 1,2 helyen! **(3 pont)**

Megoldás:

Zérushelyek: **0** és **5**. (2 pont)
A helyettesítési érték $-\mathbf{4{,}56}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

15) Mennyi az $f(x) = -|x| + 10$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény legnagyobb értéke, és hol veszi fel ezt az értéket? **(2 pont)**

Megoldás:

A legnagyobb érték: **10**. (1 pont)
Ezt az $x = 0$ helyen veszi fel. (1 pont)

Összesen: 2 pont

16)

a) Fogalmazza meg, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x+2| - 1$ függvény grafikonja milyen transzformációkkal származtatható az $f_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_0(x) = |x|$, függvény grafikonjából! Ábrázolja az f függvényt a $[-6;6]$ intervallumon! **(5 pont)**

b) Írja fel az $A(-4;1)$ és $B(5;4)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét! Mely pontokban metszi az AB egyenes az f függvény grafikonját? (Válaszát számítással indokolja!) **(7 pont)**

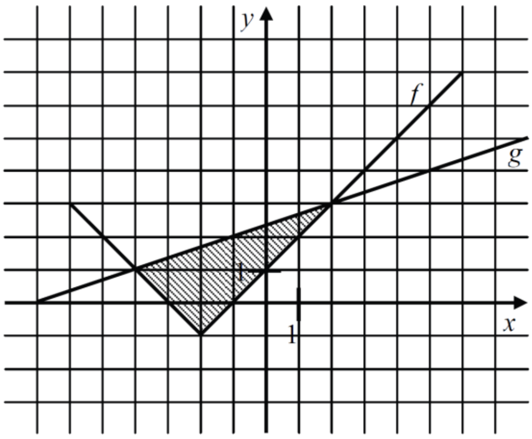
Megoldás:

a) Ha az $f_0 = |x|$ grafikonját előbb a $(-2;0)$, (1 pont)
majd a $(0;-1)$ vektorral eltoljuk, az f függvény grafikonját kapjuk. (1 pont)
Helyes grafikon. (3 pont)

b) Az AB egyenes egyenlete: $x - 3y = -7$ (3 pont)

Az egyik közös pont: $A(-4;1)$ (2 pont)

Az egyik közös pont: $B(2;3)$ (2 pont)



Összesen: 12 pont

17) Adja meg a $3x + 2y = 18$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit! **(2 pont)**

Megoldás:

$(0;9)$ (2 pont)

18) **A valós számok halmazán értelmezett f másodfokú függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját a $v(2;-4,5)$ vektorral eltoltuk.**

a) Adja meg az f függvény hozzárendelési utasítását képlettel! **(3 pont)**

b) Határozza meg f zérushelyeit! **(4 pont)**

c) Ábrázolja f grafikonját a $[-2;\ 6]$ intervallumon! **(4 pont)**

Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

d) $\frac{1}{2}x^2 \le 2x+\frac{5}{2}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A függvény hozzárendelési szabálya:

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-4,5$ (3 pont)

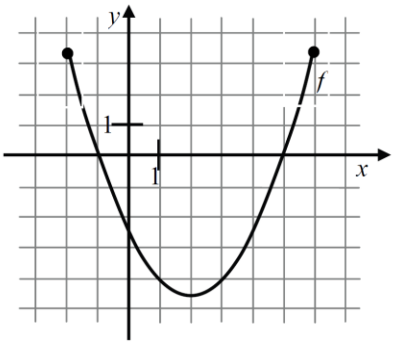
b) A $0,5(x-2)^2-4,5=0$ egyenletet kell megoldani. (1 pont)

$0,5(x-2)^2-4,5=0$ (1 pont)

$x_1=5$ (1 pont)

$x_2=-1$ (1 pont)

c)



(4 pont)

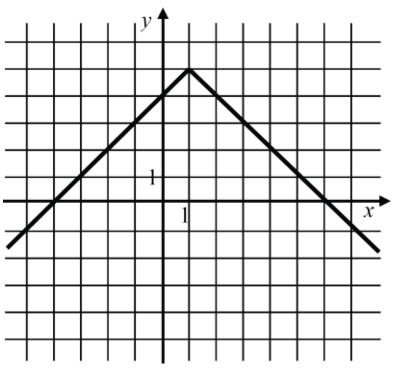
d) Átrendezve az egyenlőtlenséget, éppen az $f(x)\le 0$ alakhoz jutunk. (3 pont)

Ennek az egész megoldásai: $-1;0;1;2;3;5$. (3 pont)

A feladat megoldható grafikusan is.

Összesen: 17 pont

19) **A valós számok halmazán értelmezett $x\mapsto|x|$ függvényt transzformáltuk. Az alábbi ábra az így kapott f függvény grafikonjának egy részletét mutatja. Adja meg f hozzárendelési utasítását képlettel!** **(3 pont)**



Megoldás:

A hozzárendelési utasítás: $x\mapsto -|x-1|+5$ (3 pont)

A hozzárendelési utasítás megadható a függvény két részre bontásával is.

20) Legyen *f* a valós számok halmazán értelmezett függvény,

$$f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Mennyi az *f* függvény helyettesítési értéke, ha $x = \frac{\pi}{3}$?

Írja le a számolás menetét! **(3 pont)**

Megoldás:

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ (1 pont)

$= 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$ (1 pont)

$= \mathbf{-1}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

21) Az $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto 3 + \log_2 x$ függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?

A: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto 3\log_2 x$

B: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \log_2(8x)$

C: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \log_2(3x)$

D: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \log_2(x^3)$ **(2 pont)**

Megoldás:

A helyes válasz betűjele: **B** (2 pont)

22)

a) Rajzolja meg derékszögű koordinátarendszerben a $]-1;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto -|x-2|+3$ hozzárendelésű függvény grafikonját! **(4 pont)**

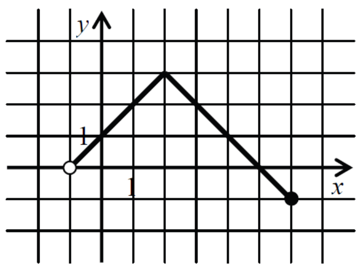
b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét, és adja meg az összes zérushelyét! **(3 pont)**

c) Döntse el, hogy a $P(3,2;1,58)$ pont rajta van-e a függvény grafikonján! Válaszát számítással indokolja! **(2 pont)**

d) Töltse ki az alábbi táblázatot, és adja meg a függvényértékek (a hét szám) mediánját! **(3 pont)**

Megoldás:

a)



(4 pont)

b) Az értékkészlet az $[-1;3]$ intervallum, (2 pont)

a függvény zérushelye az $(\boldsymbol{x} =)\mathbf{5}$ (1 pont)

c) ***P* nincs a grafikonon**, (1 pont)

mert pl. $-|3,2-2|+3=1,8$ (1 pont)

d)

x	-0,5	0	1,7	2	2,02	4	5,5
$-\lvert x-2\rvert+3$	0,5	1	2,7	3	2,98	1	-0,5

(1 pont)

Sorba rendezés: –0,5; 0,5; 1; 1; 2,7; 2,98; 3. (1 pont)

A medián **1**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

23) Milyen valós számokat jelöl az a, ha tudjuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő? (2 pont)

Megoldás:

$a > 1$ (2 pont)

24) Adja meg képlettel egy olyan, a valós számok halmazán értelmezett függvény hozzárendelési utasítását, amelynek (abszolút) maximuma van! A megadott függvénynek állapítsa meg a maximumhelyét is! (3 pont)

Megoldás:

Például: $f: \ x \mapsto -x^2 - 2x - 1$ (2 pont)

Abszolút maximuma van $x = -1$ helyen. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) A következő két függvény mindegyikét a valós számok halmazán értelmezzük:

$f(x) = 3\sin x$; $g(x) = \sin 3x$.

Adja meg mindkét függvény értékkészletét! (2 pont)

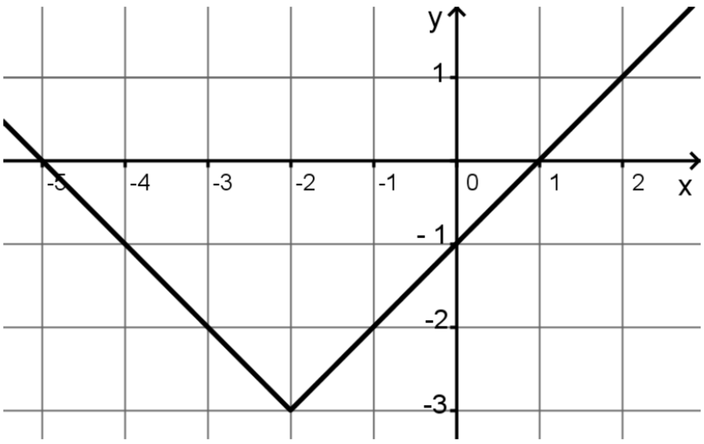
Megoldás:

f értékkészlete: $R_f = [-3;3]$ (1 pont)

g értékkészlete: $R_g = [-1;1]$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

26) Az ábrán a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x + a| + b$ függvény grafikonjának egy részlete látható. Adja meg a és b értékét! (2 pont)



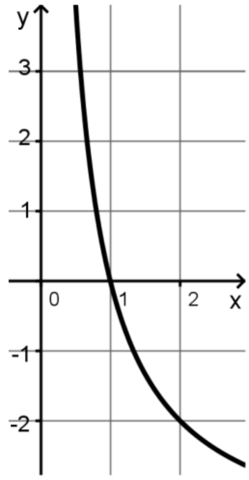
Megoldás:

$a = 2$ (1 pont)

$b = -3$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

27) **István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x \left(x > 0\right)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán). Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!**



a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.
b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.
c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1.

Megoldás:

b). (2 pont)

28) **Adott a valós számok halmazán értelmezett $f\left(x\right) = \left(x+2\right)^2 + 4$ függvény. Adja meg az *f* függvény minimumának helyét és értékét!** **(2 pont)**

Megoldás:

A minimum helye: -2 (1 pont)
A minimum értéke: 4 (1 pont)
Összesen: (2 pont)

29) **Az alább felsorolt, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket közös koordinátarendszerben ábrázoljuk. A három függvény közül kettőnek a grafikonja megegyezik, a harmadik eltér tőlük. Melyik függvény grafikonja tér el a másik két függvény grafikonjától?** **(2 pont)**

a) $x \mapsto \frac{1}{2}\sin\left(2x\right)$

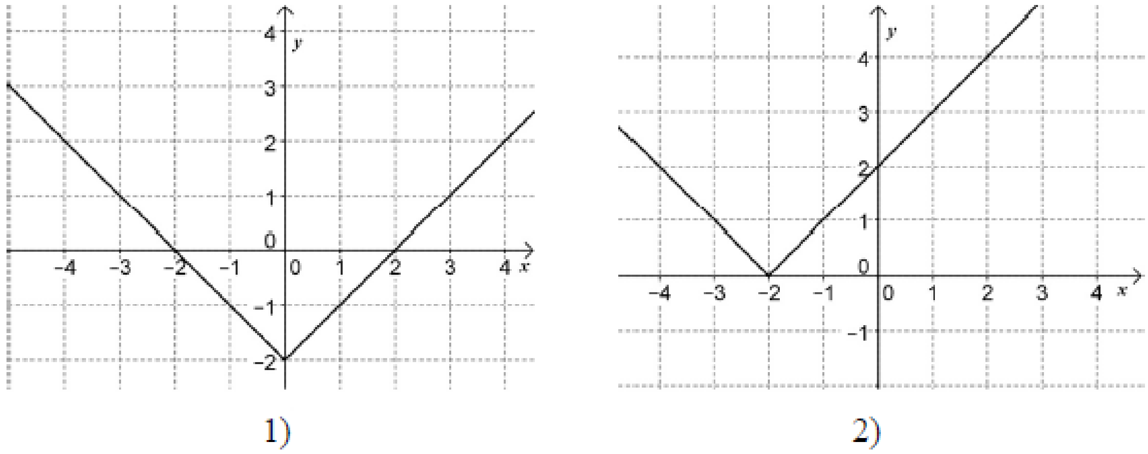
b) $x \mapsto \sin x$

c) $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Megoldás:

A helyes válasz betűjele: **a)** (2 pont)

30) Az alábbi hozzárendelési utasítással megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények közül kettőnek egy-egy részletét ábrázoltuk. Adja meg a grafikonokhoz tartozó hozzárendelési utasítások betűjelét! **(2 pont)**



A) $x \mapsto |x+2|$ B) $x \mapsto |x-2|$ C) $x \mapsto |x|-2$ D) $x \mapsto |x|+2$

Megoldás:

1) párja **C)** (1 pont)
2) párja **A)** (1 pont)

Összesen: 2 pont

31) Adja meg az $x \to x^2+10x+21 \ (x \in \mathbb{R})$ másodfokú függvény minimumhelyét és minimumának értékét! Válaszát indokolja! **(4 pont)**

Megoldás:

$x^2+10x+21=(x+5)^2-4$ (2 pont)
A minimumhely $\mathbf{-5}$. (1 pont)
A minimum értéke $\mathbf{-4}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

32) Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá: $f(x)=5x+5{,}25$ és $g(x)=x^2+2x+3{,}5$

a) Számítsa ki az alábbi táblázatok hiányzó értékeit! **(3 pont)**

x	3	x	
$f(x)$		$g(x)$	2,5

b) Adja meg a g függvény értékkészletét! **(3 pont)**

c) Oldja meg az $5x+5{,}25>x^2+2x+3{,}5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! **(6 pont)**

Megoldás:

a) $\boldsymbol{f(3)=20,25}$ (1 pont)

$x^2+2x+3,5=2,5$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=-1}$ (1 pont)

b) A függvény hozzárendelési utasítását átalakítva: $x^2+2x+3,5=(x+1)^2+2,5$

(1 pont)

A függvény minimuma a 2,5. (1 pont)

Az értékkészlet: $\boldsymbol{[2,5;\infty[}$ (1 pont)

c) Rendezés után: $x^2-3x-1,75<0$. (1 pont)

Az $x^2-3x-1,75=0$ egyenlet gyökei: $x_1=-\frac{1}{2}$ és $x_2=\frac{7}{2}$. (2 pont)

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, (1 pont)

ezért az egyenlőtlenség megoldása: $\boldsymbol{-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}}$. (2 pont)

Összesen: 12 pont

33) Adja meg az alábbi hozzárendelési szabályokkal megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények értékkészletét!

$\boldsymbol{f(x)=2\sin x}$

$\boldsymbol{g(x)=\cos 2x}$ **(2 pont)**

Megoldás:

f értékkészlete: $\boldsymbol{[-2;2]}$ (1 pont)

g értékkészlete: $\boldsymbol{[-1;1]}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

34) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $\boldsymbol{f(x)=4}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az $\boldsymbol{x}$ tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)

b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének $\boldsymbol{cm^2}$-ben mért számértéke. (1 pont)

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **hamis** (1 pont)
c) **igaz** (1 pont)
d) **hamis** (1 pont)

Összesen: 4 pont

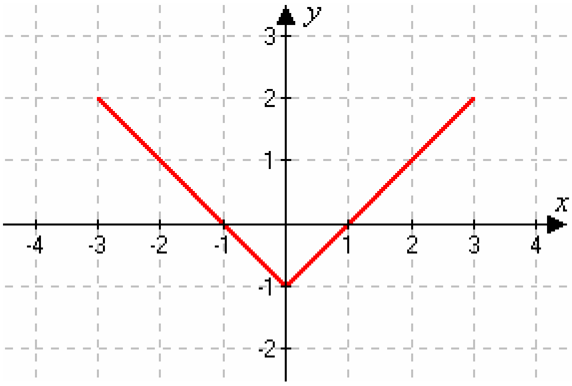
35)

a) **Rajzolja fel a $[-3;3]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto |x| - 1$ függvény grafikonját!** **(2 pont)**

b) **Mennyi a legkisebb függvényérték?** **(1 pont)**

Megoldás:

a)



(2 pont)

b) A legkisebb függvényérték: $\mathbf{-1}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

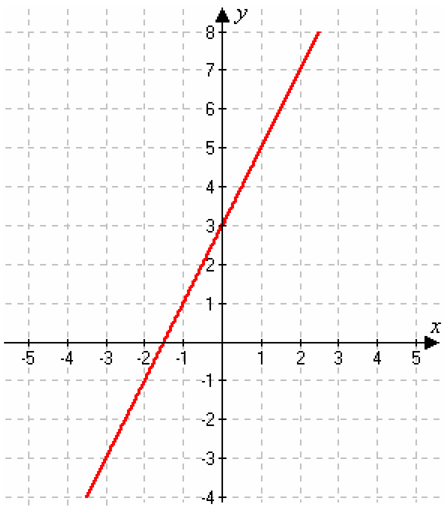
36) Melyik az ábrán látható egyenes egyenlete az alábbiak közül? **(2 pont)**

A: $y = 2x + 3$

B: $y = -2x + 3$

C: $y = 2x - 1,5$

D: $y = 2x - 3$



Megoldás:

A helyes válasz betűjele: **A.** (2 pont)

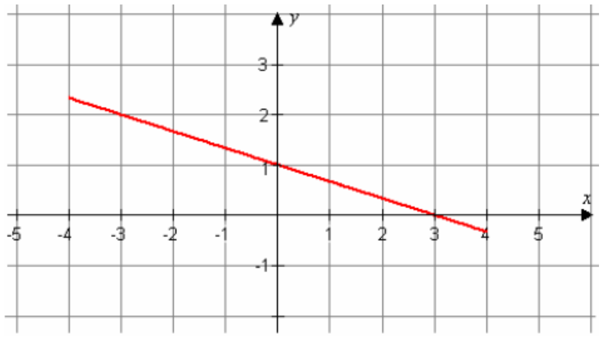
37) Az ábrán egy $[-4;4]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki, hogy melyik formula adja meg helyesen a függvény hozzárendelési szabályát! **(2 pont)**

a) $x \mapsto \frac{1}{3}x + 1$

b) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 1$

c) $x \mapsto -3x + 1$

d) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 3$



Megoldás:

b) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 1$ (2 pont)

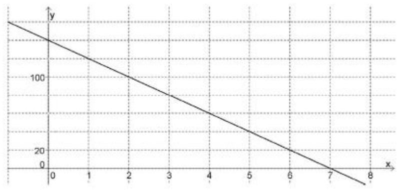
Összesen: 2 pont

38) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x - 4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x) = 6$? **(2 pont)**

Megoldás:

$x_1 = -2$, $x_2 = 10$ (2 pont)

39) Az ábrán az $x \mapsto m \cdot x + b$ lineáris függvény grafikonjának egy részlete látható. Határozza meg m és b értékét! **(3 pont)**



Megoldás:

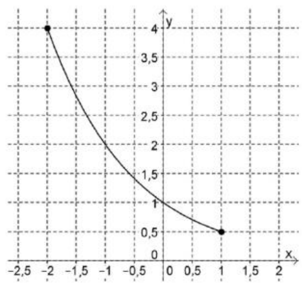
$b = 140$ (1 pont)
$m = -20$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

40) Az ábrán az $f: [-2;1] \Rightarrow \mathbb{R};\ f(x) = a^x$ függvény grafikonja látható.

a) Adja meg az f függvény értékkészletét! **(1 pont)**

b) Határozza meg az a szám értékét! **(2 pont)**



Megoldás:

Az f értékkészlete $[0,5;4]$. (1 pont)

$a = 0,5$. (2 pont)

41) **Válassza ki az f függvény hozzárendelési szabályát az A, B, C, D lehetőségek közül úgy, hogy az megfeleljen az alábbi értéktáblázatnak!** **(2 pont)**

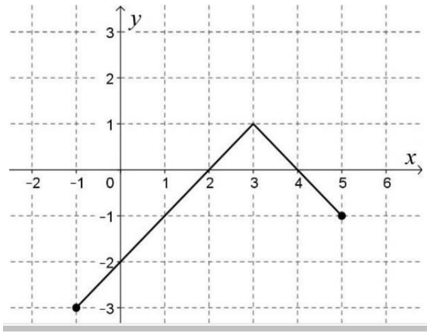
x	-2	0	2
$f(x)$	-4	0	-4

A: $f(x)=2x$ **B:** $f(x)=x^2$ **C:** $f(x)=-2x$ **D:** $f(x)=-x^2$

Megoldás:

D (2 pont)

42) **Az ábrán a $[-1;5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát!** **(2 pont)**



A: $x \mapsto |x-3|+1$

B: $x \mapsto -|x+3|+1$

C: $x \mapsto -|x-3|+1$

D: $x \mapsto -|x+3|-1$

Megoldás:

C (2 pont)

43)

a) **Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge?** **(4 pont)**

b) **Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!**

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$ **(6 pont)**

c) **Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!** **(2 pont)**

I) **Az $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ függvény páratlan függvény.**

II) **Az $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, g(x)=\cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.**

III) **A $h:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $h(x)=\cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.**

Megoldás:

a) (A kérdezett szöget α-val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)

$7^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos\alpha$ (1 pont)

Ebből $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, (1 pont)

azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = 60°$ (1 pont)

b) Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{\mathbf{3}}$, (1 pont)

vagy $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{5}\pi}{\mathbf{3}}$. (1 pont)

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}}$, (1 pont)

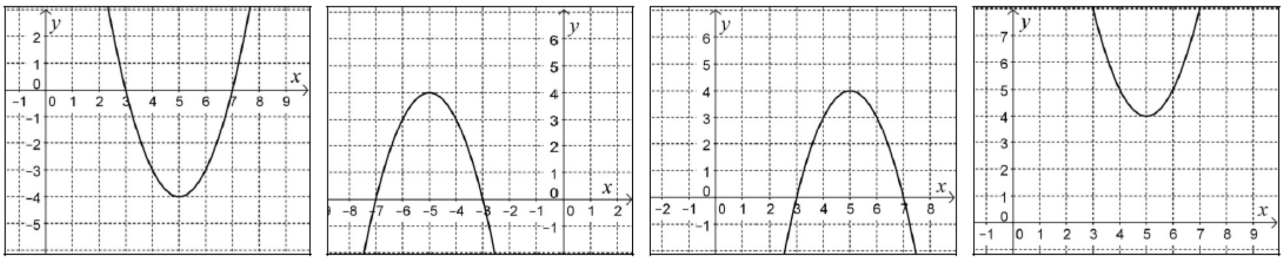
vagy $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{4}\pi}{\mathbf{3}}$. (1 pont)

c)

I) **igaz**
II) **hamis**
III) **hamis** (2 pont)

Összesen: 12 pont

44) Adott a valós számok halmazán értelmezett $\boldsymbol{x \mapsto -(x-5)^2+4}$ függvény. Melyik ábrán látható e függvény grafikonjának egy részlete? (2 pont)



A **B** **C** **D**

Megoldás:

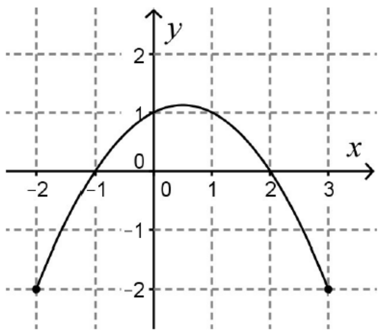
A helyes válasz: **C** (2 pont)

45) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $\boldsymbol{x \to 1+\cos x}$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[\mathbf{0;2}]$ (2 pont)

46) Az ábrán látható függvény értelmezési tartománya a $[\mathbf{-2;3}]$ intervallum, két zérushelye a $\mathbf{-1}$ és $\mathbf{2}$. Az értelmezési tartományának mely részhalmazán vesz fel a függvény pozitív értéket? (2 pont)



Megoldás:

A kérdéses intervallum: $]\mathbf{-1;2}[$ (2 pont)

STUDIUM GENERALE
MATEMATIKA

47) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto (x-2)^2$ függvény minimumának helyét és értékét! **(2 pont)**

Megoldás:

A minimum helye: **2**. (1 pont)
A minimum értéke: **0**. (1 pont)
Összesen: 2 pont

48)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$|x-3| = 3x-1$. **(7 pont)**

Az $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = a \cdot x + b$ lineáris függvény zérushelye -4. Tudjuk továbbá, hogy az $x = 4$ helyen a függvényérték 6.

b) Adja meg a és b értékét! **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet alakja $x \geq 3$ esetén: $x-3=3x-1$, (1 pont)
amiből $x=-1$, (1 pont)
ami nem megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)
Az egyenlet alakja $x<3$ esetén: $-(x-3)=3x-1$, (1 pont)
amiből $\boldsymbol{x=1}$. (2 pont)
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozva. (1 pont)

b) A megadott feltételek szerint $a \cdot (-4)+b=0$, (2 pont)
továbbá $a \cdot 4+b=6$. (1 pont)
Az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve és a másik egyenletbe helyettesítve vagy a két egyenletet összeadva kapjuk, hogy (1 pont)
$\boldsymbol{b=3}$, (1 pont)
$\boldsymbol{a=0,75}$. (1 pont)
Összesen: 13 pont