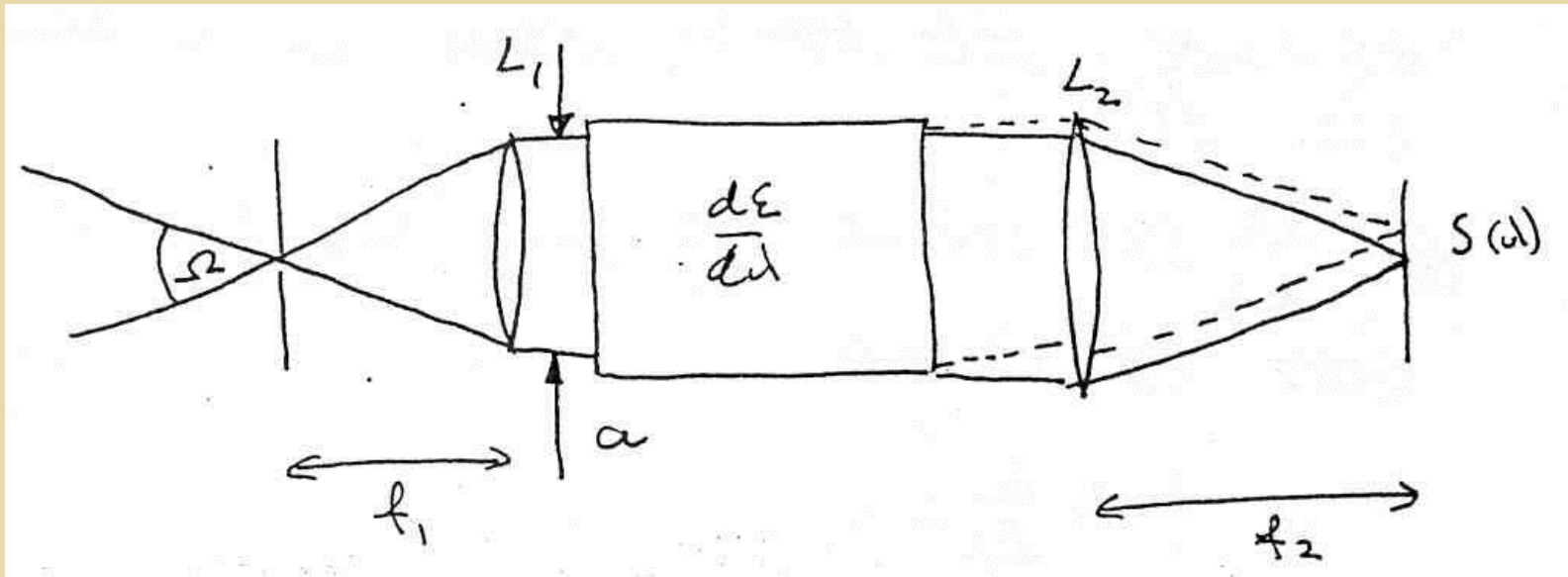


Spektroszkópia II.

**Szabó Gábor egyetemi tanár,
SZTE Optikai Tanszék**

Spektrográfok



Értékmérők:

1. Fényerő (speed)

$$\frac{a}{f_1}$$

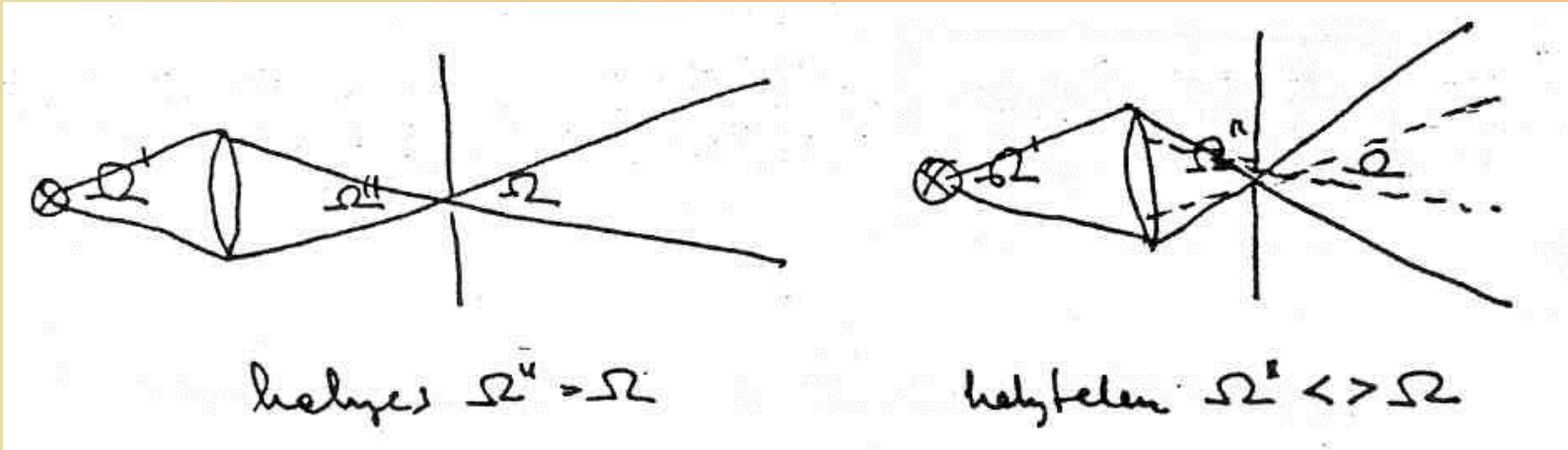
Térszög

$$\Omega = \frac{a^2}{f_1^2}$$

Spektrográfok

A spektrográfba bejutó összes fény:

$$F_s \Omega \quad \text{ahol } F_s \text{ a rés felülete}$$



helyes

Spektrográfok

2. Transzmisszió:

A spektrográfokban levő anyagok $T(\lambda)$, $R(\lambda)$ függvényei.

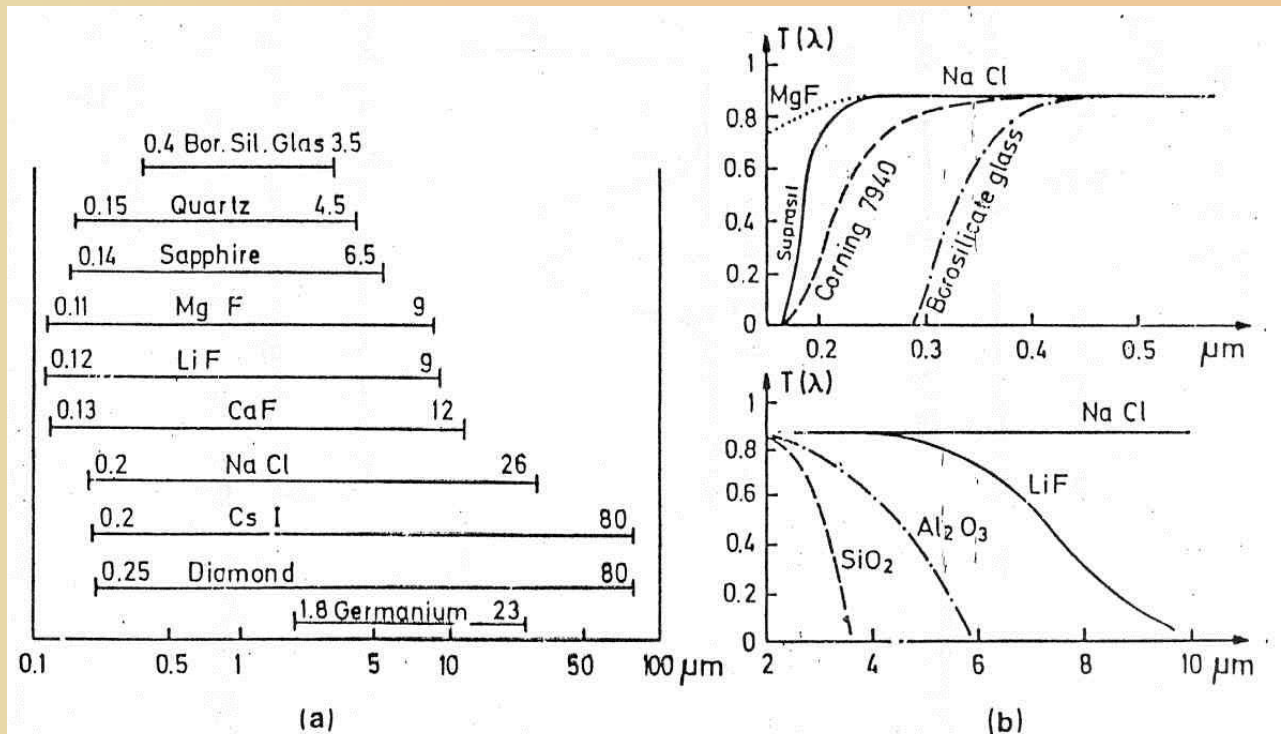
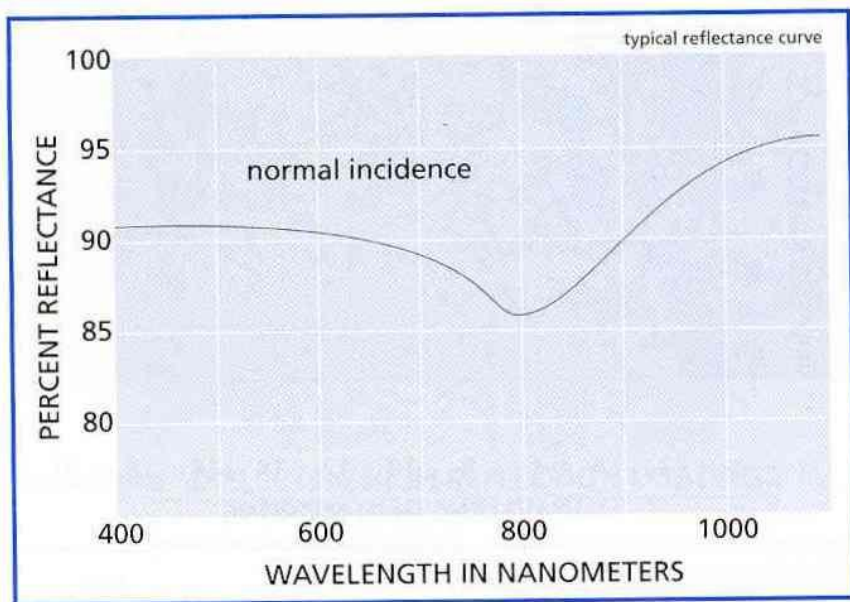
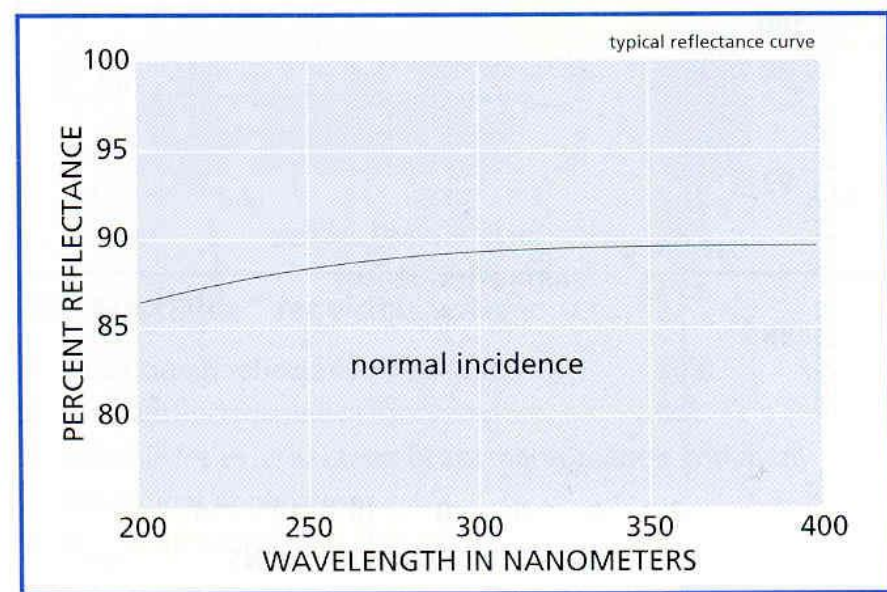


Fig.4.5. Useful spectral ranges of different optical materials (a) and transmittance of different materials with thicknesses 1 cm (b). [4.5b]

Transzmisszió (folyt.)

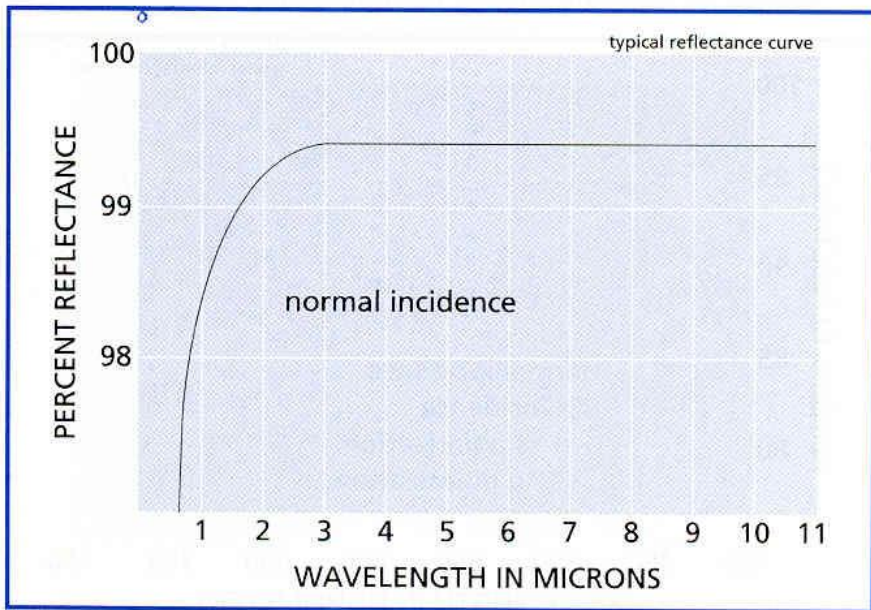


/016 Aluminum coating

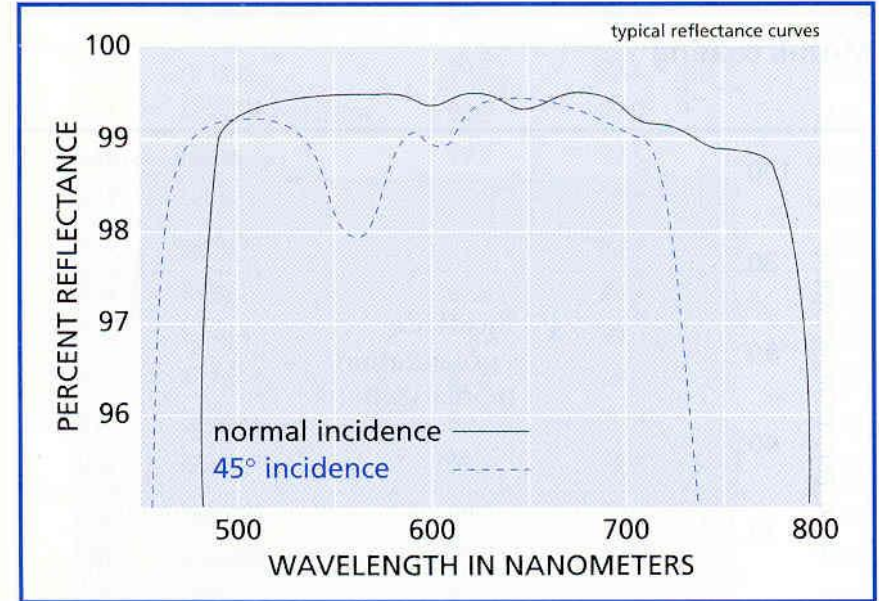


/028 UV Enhanced aluminum coating

Transzmisszió (folyt.)



/045 Gold coating



/001 MAXBRite™ for visible wavelengths

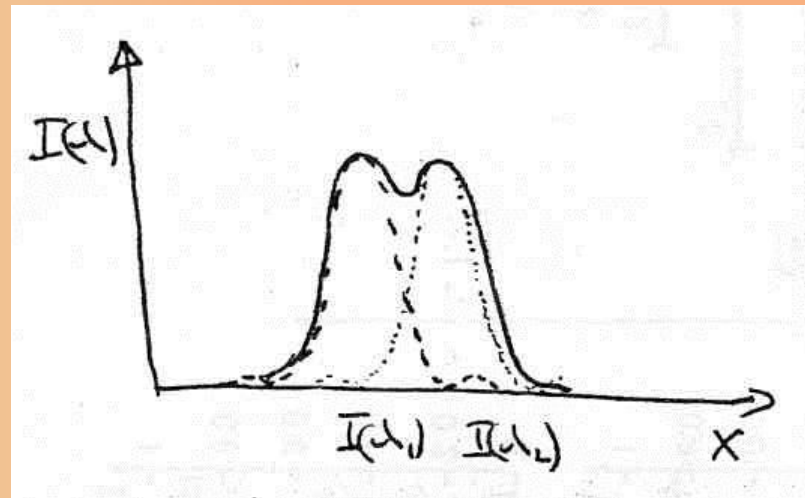
Spektrográfok

3. Feloldóképesség (resolving power):

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\nu}{\Delta\nu}$$

ahol: $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ **a még éppen megkülönböztethető hullámhosszak különbsége.**

Rayleigh kritérium:



Feloldóképesség (folyt.)

Ha két fénysugár egymással $\Delta\varphi$ szöget zár be, akkor a hozzájuk tartozó pontok a fókuszsíkban Δx távolságra lesznek:

$$\Delta x = f\Delta\varphi$$

Egy monokromatikus komponensre a diffrakció első minimumának iránya:

$$\Delta\varphi_d = \frac{\lambda}{a}$$

Tehát:

$$\Delta x_d = f \frac{\lambda}{a}$$

Feloldóképesség (folyt.)

Másrészt, ha két monokromatikus fénysugár hullámhossza $\Delta\lambda$ -val különbözik akkor ezek a bontóelem után eltérő irányban haladnak:

$$\Delta\varphi_\lambda = \frac{d\varepsilon}{d\lambda} \Delta\lambda$$

A távolságuk a fókuszsíkban:

$$\Delta x_\lambda = f \frac{d\varepsilon}{d\lambda} \Delta\lambda$$

Két hullámhossz megkülönböztethető, ha:

$$\Delta x_\lambda \geq \Delta x_d$$

Feloldóképesség (folyt.)

A határ:

$$\Delta x_\lambda = \Delta x_d \Rightarrow \frac{\lambda}{a} = \frac{d\varepsilon}{d\lambda} \Delta\lambda$$

Tehát a feloldóképesség:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = a \frac{d\varepsilon}{d\lambda}$$

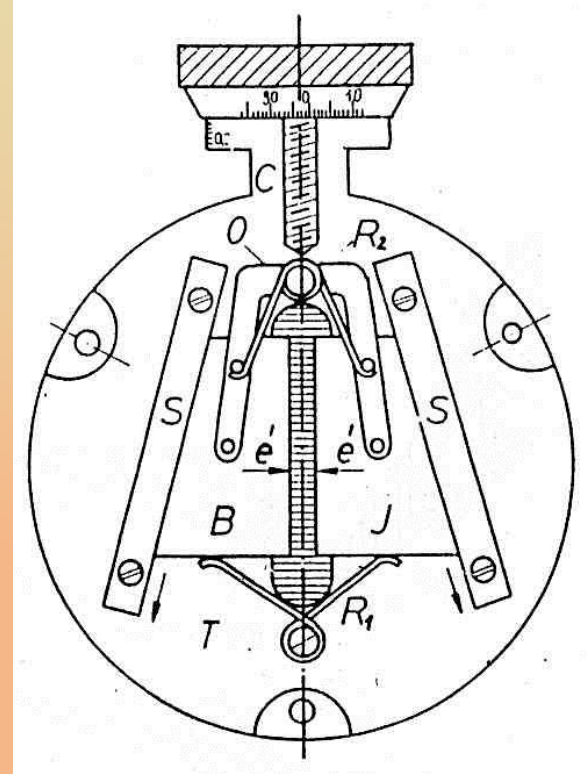
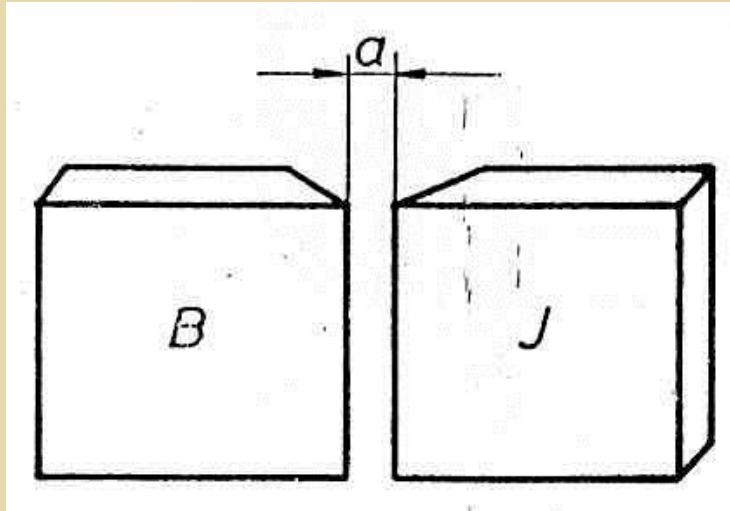
Spektrográfok

4. Szabad spektrális tartomány (free spectral range, FSR).

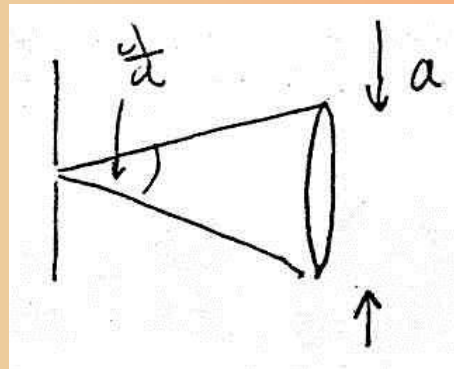
5. Ár.

Spektrográfok fizikai felépítése

Rés.



Optimális résszélesség.



Spektrográfok fizikai felépítése

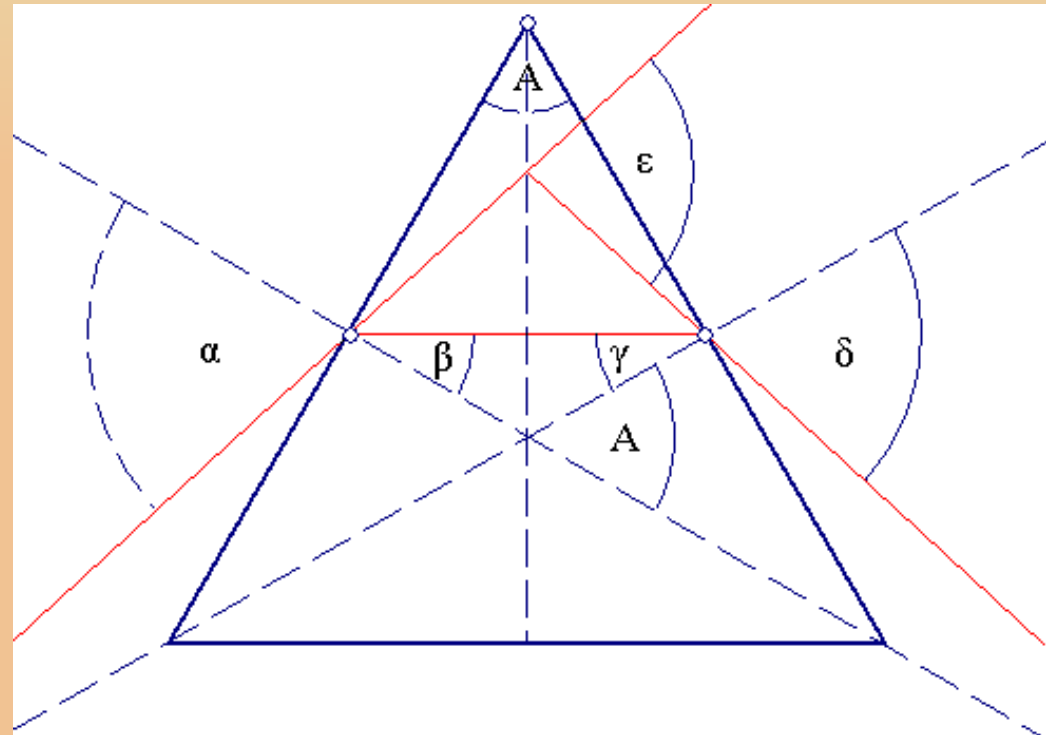
Bontóelem: prizma
optikai rács

Fénysugár törése prizmában

Tekintsük a minimális deviáció (szimmetrikus sugármenet) esetét.

Számítsuk ki a deviáció szögét (ε)!

Vegyük észre, hogy α -t és β -t, illetve γ -t és δ -t a fénytörés törvénye köti össze. Az ábráról azonnal látszik, hogy $A = \beta + \gamma$. (A -t a prizma törőszögének nevezzük.)



Fénysugár törése prizmában

A deviáció szöge nyilván $\varepsilon=(\alpha-\beta)+(\delta-\gamma)$. Vegyük észre, hogy a szimmetria miatt $\alpha=\delta$ és $\beta=\gamma$.

Ezzel $\varepsilon=2(\alpha-\beta)$.

Az $A=\beta+\gamma$ -ból, valamint $\beta=\gamma$ -ból következik, hogy $\beta=A/2$.

Ezekkel kifejezve α -t kapjuk:

$$\alpha=\varepsilon/2+A/2.$$

Alkalmazzuk a fénytörés törvényét:

$$\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = n_{\lambda}$$

(A λ index arra utal, hogy a törésmutató függ a hullámhossztól.)

Prizma diszperziója

A $d\varepsilon/d\lambda$ -ra lenne szükségünk. Ezt megkaphatjuk úgy is, hogy képezzük a

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{d\varepsilon}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

szorzatot.

Ehhez deriváljuk először a fénytörést kifejező egyenletet ε szerint.

$$\frac{dn}{d\varepsilon} = \frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}}$$

Prizmás spektrográfok (folyt.)

Vegyük a reciprok értéket

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{2} \right)}$$

Behelyettesítve:

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\cos \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{2} \right)} \frac{dn}{d\lambda}$$

Használjuk ki, hogy:

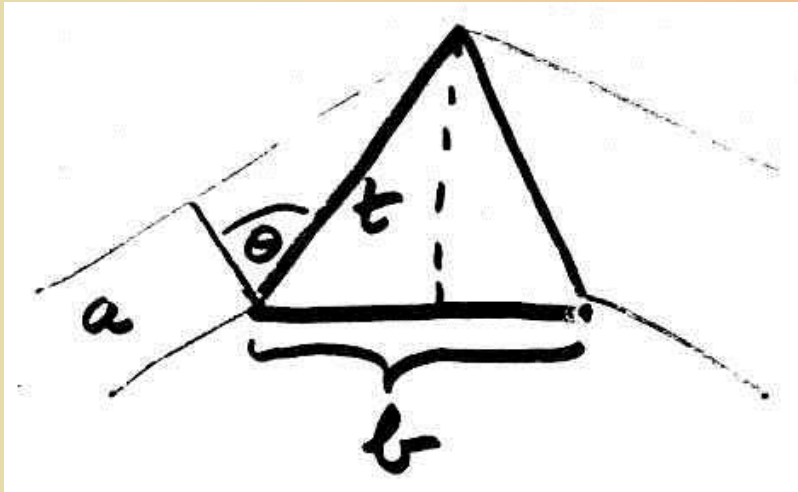
$$\sin \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{2} \right) = n \sin \left(\frac{A}{2} \right) \Rightarrow \cos \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{2} \right) = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}$$

Prizmás spektrográfok (folyt.)

Behelyettesítve:

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}$$

A feloldóképességhez szükségünk van a -ra.



$$t = \frac{a}{\cos \Theta} = \frac{b \cos \Theta}{2 \sin \frac{A}{2}}$$

$$a = \frac{b \cos \Theta}{2 \sin \frac{A}{2}}$$

Prizmás spektrográfok (folyt.)

Tehát a feloldóképesség:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{b \cos \Theta}{2 \sin \frac{A}{2}} \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\underbrace{\cos \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{2} \right)}_{\Theta}} \frac{dn}{d\lambda}$$

A végeredmény:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{dn}{d\lambda}$$

Prizmás spektrográfok (folyt.)

Anyagok diszperziója:

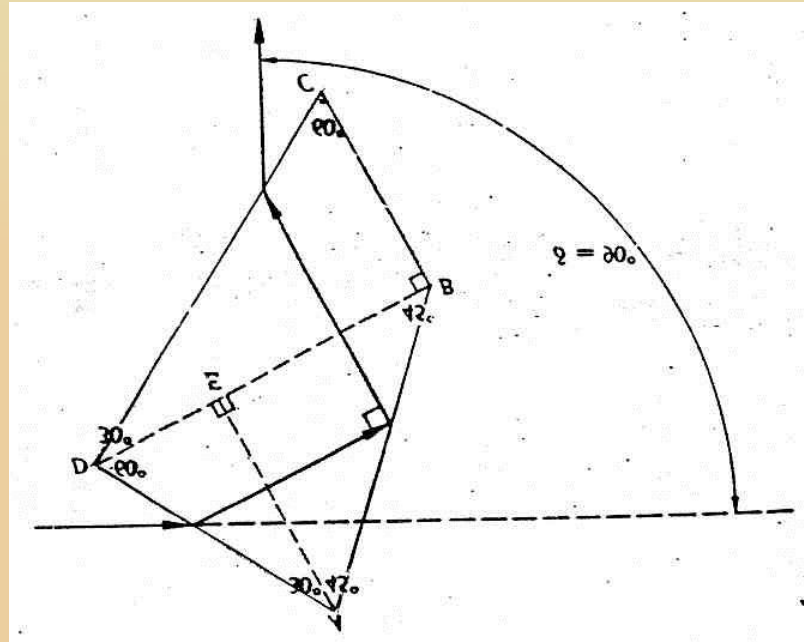
| Material | Useful spectral range [μm] | Refractive index n | Dispersion $d/d\lambda$ [nm^{-1}] |
|--------------|---|----------------------|--|
| Glas (BK7) | 0.35 - 3.5 | 1.516 | 4.6×10^{-5} at 589 nm |
| | | 1.53 | 1.1×10^{-4} at 400 nm |
| Heavy flint | 0.4 - 2 | 1.755 | 1.4×10^{-4} at 589 nm |
| | | 1.81 | 4.4×10^{-4} at 400 nm |
| Fused quartz | 0.15 - 4.5 | 1.458 | 3.4×10^{-5} at 589 nm |
| | | 1.470 | 1.1×10^{-4} at 400 nm |
| NaCl | 0.2 - 26 | 1.79 | 6.3×10^{-3} at 200 nm |
| | | 1.38 | 1.7×10^{-5} at 20 nm |
| LiF | 0.12 - 9 | 1.44 | 6.6×10^{-4} at 200 nm |
| | | 1.09 | 8.6×10^{-5} at 10 nm |

Gyakorlati példa:

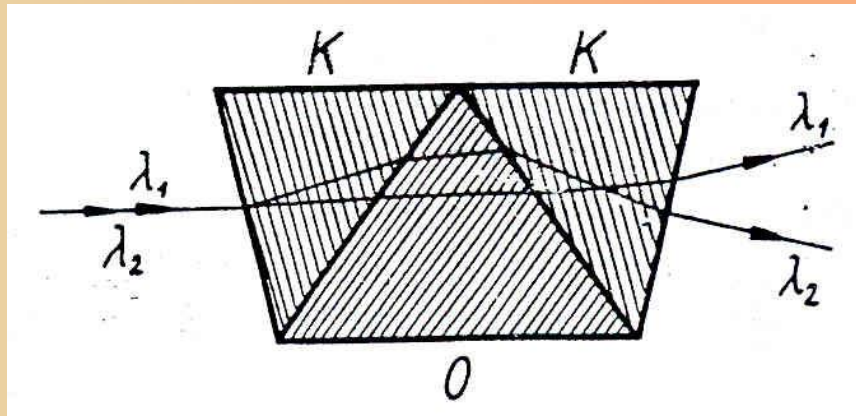
$$\frac{dn}{d\lambda} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ nm}^{-1}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 5 \cdot 10^4$$

Speciális prizmák

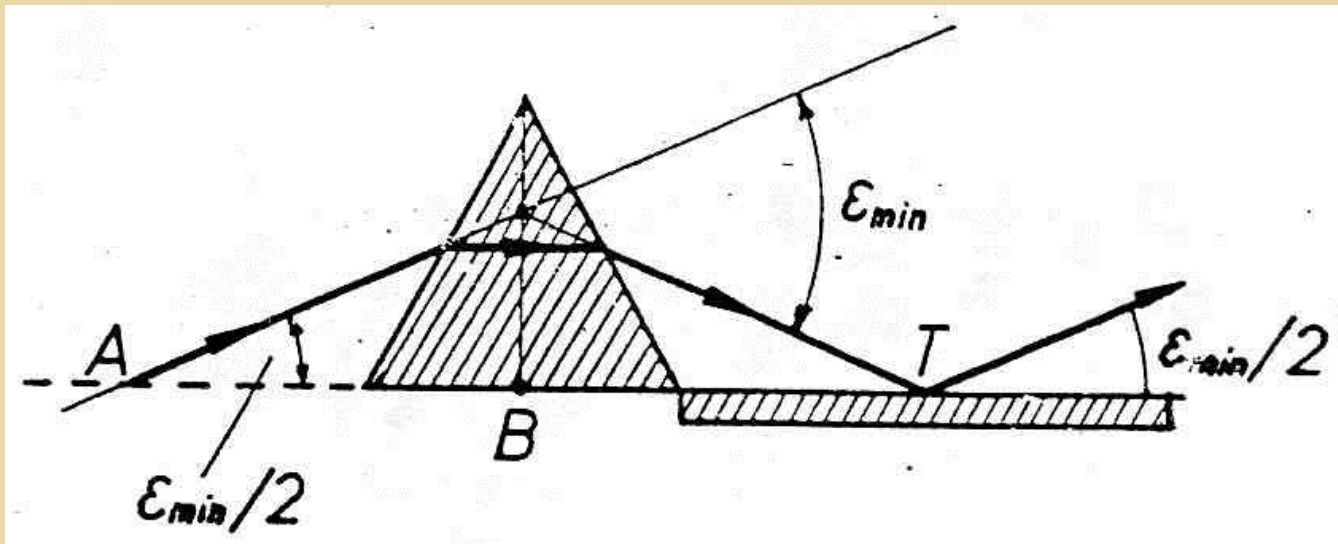
Pellin-Broca:



Amici:



Speciális prizmák



Mit mér egy fénydetektor?

Az intenzitás időátlagát.

DE: az amplitúdó/térerősség terjed.

Tekintsünk egy monokromatikus síkhullámot. Az E tér:

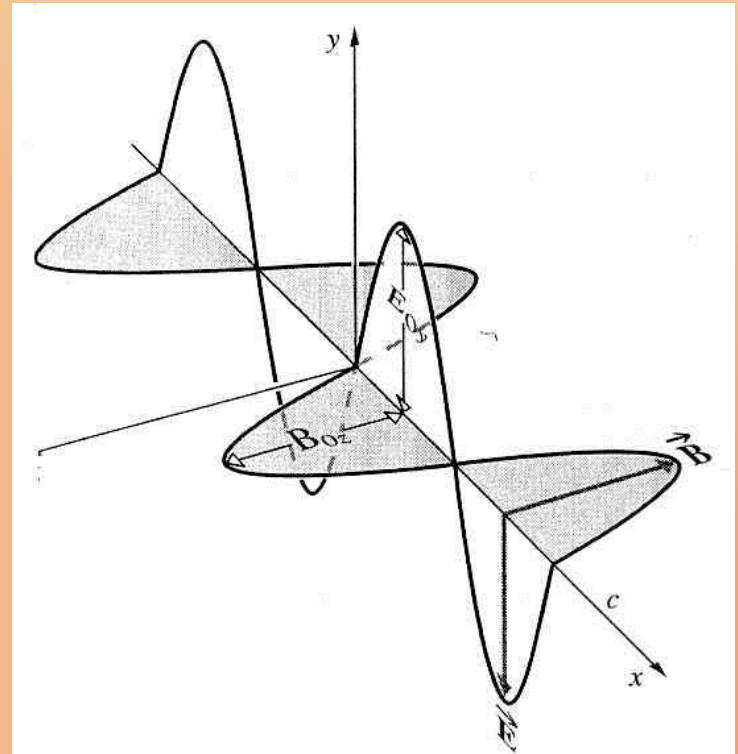
$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{E}_0 \cos(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \phi)$$

Idézzük fel, hogy:

$$E_y = cB_z$$

Azaz B-t kifejezhetjük:

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{c} \left(\frac{\bar{\mathbf{k}}}{k} \times \bar{\mathbf{E}}_0 \right) \cos(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \phi)$$



Mit mér egy fénydetektor? (folyt)

Az intenzitást a Poynting-vektor adja meg

$$\bar{S} = c^2 \varepsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B})$$

Tehát:

$$\bar{S} = c \varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 \frac{\bar{k}}{k} \cos^2(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \phi)$$

A detektor S időátlagát mutatja. Azaz feltéve, hogy a detektor időállandója T:

$$I = \langle \bar{S} \rangle = A \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \phi) dt$$

ahol: $A = c \varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2$

Mit mér egy fénydetektor? (folyt)

Tegyük fel, hogy k állandó, legalábbis a T időtartam alatt.
Bevezetve ωt -t mint új változót írhatjuk:

$$I = \frac{A}{\omega T} \int_{t_0\omega}^{(t_0+T)\omega} \cos^2(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \phi) d(\omega t)$$

Kihasználva a $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ azonosságot kapjuk:

$$I = \frac{A}{2} + \frac{A}{4\omega T} \left[\sin 2(\omega t_0 + \omega T - \bar{k}\bar{r} + \phi) - \sin 2(\omega t_0 - \bar{k}\bar{r} + \phi) \right]$$

A [] zárójelben levő tag 2-nél nagyobb nem lehet. Másrészt T még nagyon gyors detektor esetén is > 100 ps, ugyanakkor pl. zöld fényre $\omega = 4 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Tehát $\omega T \sim 4 \cdot 10^5$.

Mit mér egy fénydetektor? (folyt)

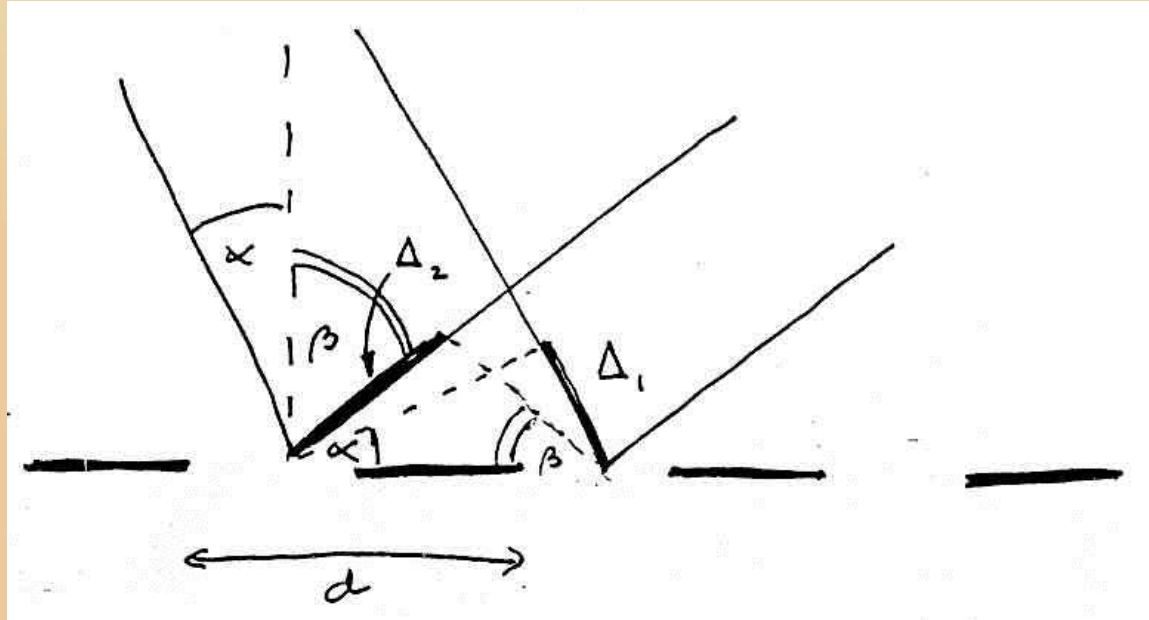
Tehát a végeredmény:

$$I = \frac{A}{2} = c\epsilon_0 \frac{|E_0|^2}{2}$$

Egy tetszőleges optikai rendszerből kilépő fény(jel) kiszámítására az általános recept tehát az, hogy a térerősség komponenseket fázishelyesen összegezzük, majd az eredményt négyzetre emeljük.

Rácsos spektrográfok

Rács feloldóképessége



Az útkülönbség:

$$\Delta s = \Delta_1 \pm \Delta_2$$

$$\Delta s = d(\sin \alpha \pm \sin \beta)$$

Rácsos spektrográfok (folyt.)

Az erősítés feltétele: $\Delta s = m\lambda$

A rácsról visszavert fényintenzitást úgy kapjuk meg, hogy vesszük a visszavert amplitúdók (E-tér) összegét, és négyzetre emeljük.

Legyen a beeső fény egy rácsra merőleges síkhullám. Azaz:

$$E = A_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad (\alpha = 0)$$

Rácsos spektrográfok (folyt.)

Az útkülönbséget számítsuk át fáziskülönbségre:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \beta$$

Tegyük fel, hogy a rácson N darab periódust (karcolatot) világítunk ki, azaz N darab amplitúdónk van. Az összeg:

$$A_r = \sqrt{R} A_0 \sum_{m=1}^N e^{im\delta}$$

A₀ beeső amplitúdó

R reflexióképesség

Rácsos spektrográfok (folyt.)

Vegyük észre, hogy ez egy mértani összeg. Alkalmazva az összegképletet:

$$A_r = \sqrt{R} A_0 \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}$$

Az intenzitás ennek a négyzete:

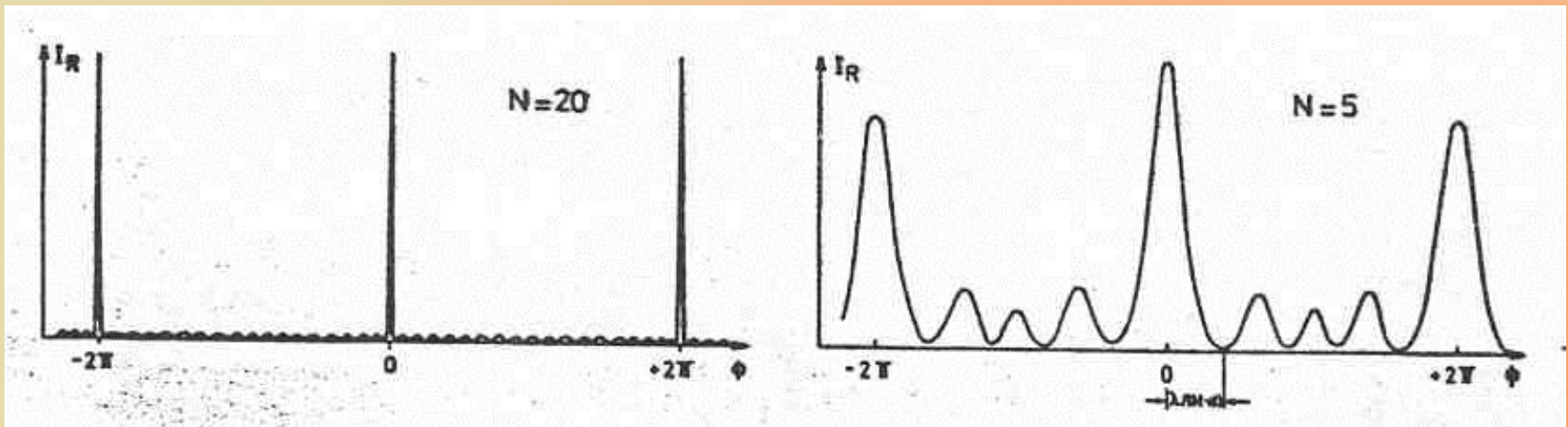
$$I_r = c |A_r|^2 = C R I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Rácsos spektrográfok (folyt.)

I_r -nek főmaximumai vannak, ha:

$$\Delta s = m\lambda \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = 2\pi m$$

A függvény képe:



Rácsos spektrográfok (folyt.)

Vizsgáljuk meg egy főmaximumai alakját, azaz keressük az intenzitást $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ -nál. (Tegyük fel, hogy $N \gg 1$, azaz $\Delta\beta \ll 1$.)

Ekkor:

$$\sin(\beta_0 + \Delta\beta) = \sin \beta_0 \cos \Delta\beta + \cos \beta_0 \sin \Delta\beta \approx \sin \beta_0 + \Delta\beta \cos \beta_0$$

Mivel:
$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \beta_0 = 2m\pi$$

Ezért a fáziskülönbség:

$$\delta = 2m\pi + 2\pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) \Delta\beta \cos \beta_0$$

Rácsos spektrográfok (folyt.)

Ezt helyettesítsük be I_r -be, és ismét használjuk ki, hogy $\Delta\beta \ll 1$.

$$I_R = RI_0 N^2 \frac{\sin^2\left(N\frac{\partial}{2}\right)}{\left(N\frac{\partial}{2}\right)^2}$$

Ahol:

$$N\frac{\partial}{2} = N\frac{d}{\lambda}\Delta\beta\cos\beta_0$$

$$I(\alpha) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi D\alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi D\alpha}{\lambda}\right)^2}$$

Vegyük észre, hogy ez éppen egy $D = Nd\cos\beta_0$ szélességű rés elhajlási képe.

Rácsos spektrográfok (folyt.)

Keressük a feloldóképességet. Ehhez szükségünk van $d\varepsilon/d\lambda$ -ra. Induljunk ki a rácsegyenletből:

$$d(\sin \alpha \pm \sin \varepsilon) = m\lambda \quad (\varepsilon = \beta)$$

Deriváljuk mindkét oldalt λ szerint (ε függ λ -tól ezért ott az összetett függvényre vonatkozó szabályt kell használnunk):

$$d \cos \varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varepsilon}$$

Rácsos spektrográfok (folyt.)

Fejezzük ki m/d -t a rácsegyenletből, és helyettesítsük be:

$$\frac{m}{d} = \frac{\sin \alpha \pm \sin \varepsilon}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{\sin \alpha \pm \sin \varepsilon}{\lambda \cos \varepsilon}$$

Ha autokollimációban vagyunk, azaz $\alpha = \varepsilon$:

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{2}{\lambda} \operatorname{tg} \varepsilon$$

A feloldóképesség:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = a \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \underbrace{Nd \cos \varepsilon}_a \frac{\sin \alpha \pm \sin \varepsilon}{\lambda \cos \varepsilon}$$

Rácsos spektrográfok (folyt.)

Használjuk fel ismét m/d -t a rácsegyenletből:

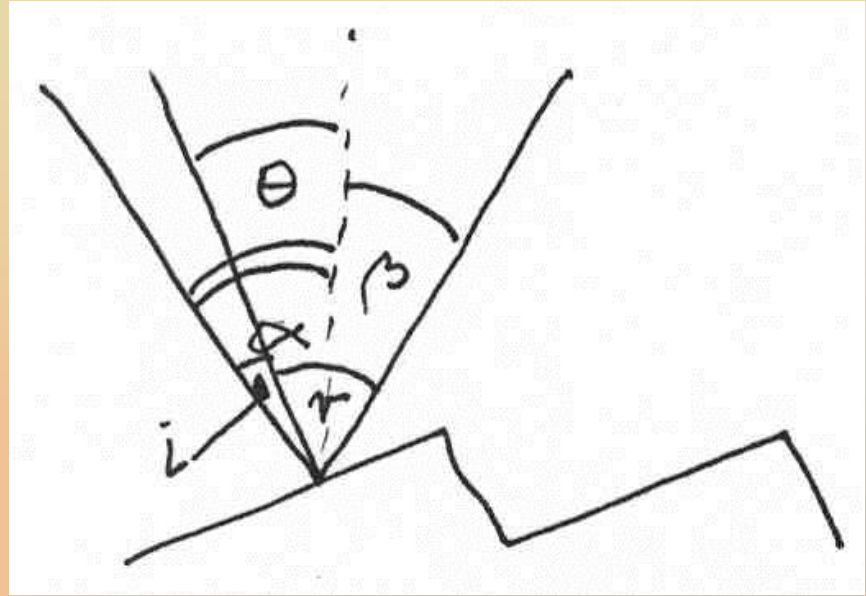
$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N \frac{\lambda m}{\underbrace{\sin \alpha \pm \sin \beta}_d} \frac{\sin \alpha \pm \sin \varepsilon}{\lambda}$$

A végeredmény:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

Csillogó (blazed) rácsok

Adjunk profilt a rácsnak



Fordítsuk a felületet úgy, hogy egy „lépcső” éppen a diffrakció irányában viselkedjen tükörként, azaz legyen $i = r$.

Mivel:

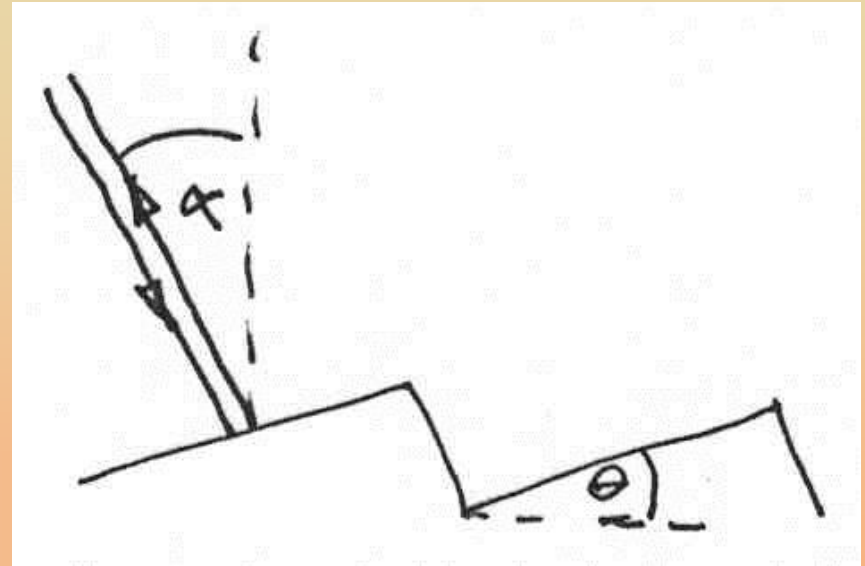
$$\alpha - \Theta = i \quad \text{és} \quad \beta + \Theta = r \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Csillogó (blazed) rácsok

Autokollimációs elrendezésben:

$$2d \sin \Theta = m\lambda$$

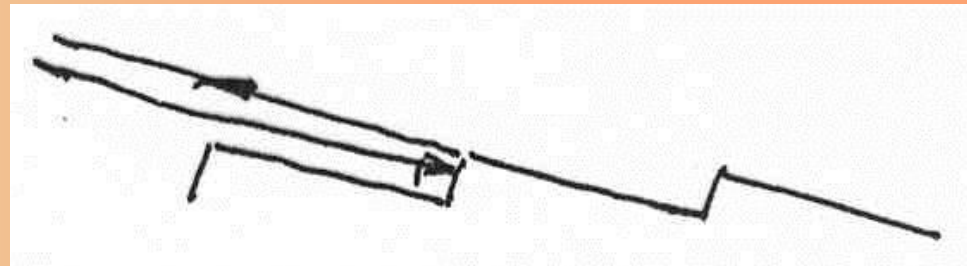
Ezek $\frac{m\lambda}{2}$ magasságú lépcsők.



A feloldóképességre kapott kifejezés:

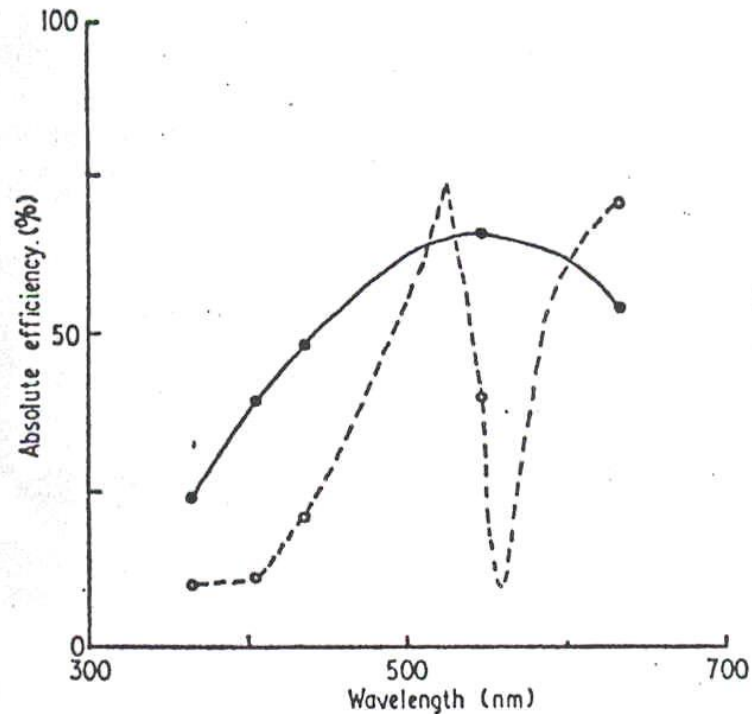
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = Nm$$

Ha $m \sim 10 \div 100$ echelon.



Rácsok

Wood anomália



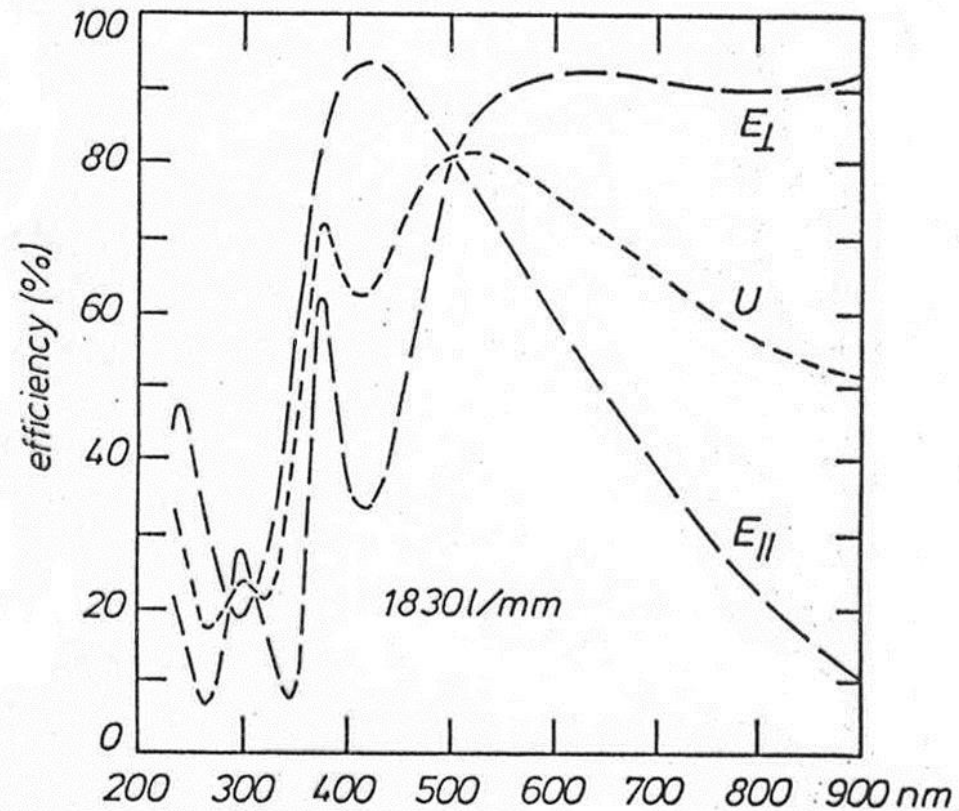
— E || r. b. v.
- - - E ⊥ r. b. v.

Figure 3. Percentage of incident light diffracted into the first order, for a 1264 grooves per mm ruled grating showing a strong Wood's anomaly. The full curve is for light polarized with the electric vector parallel with the grooves, and the broken curve for the electric vector perpendicular to the grooves.

Rácsok

Wood anomália

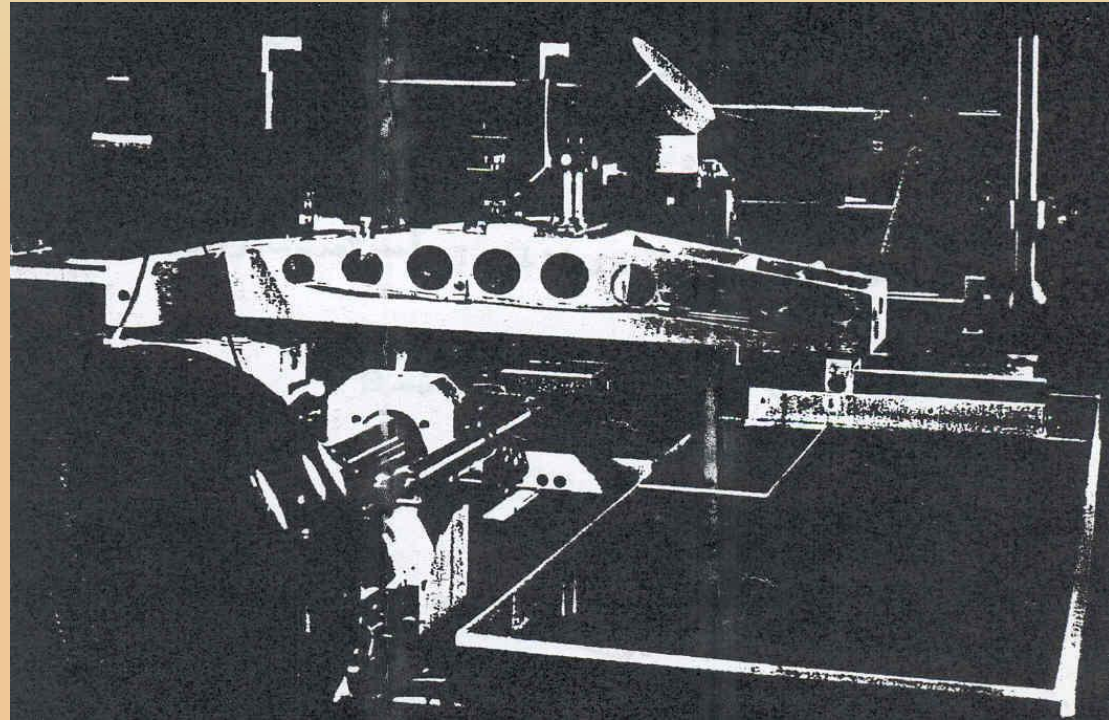
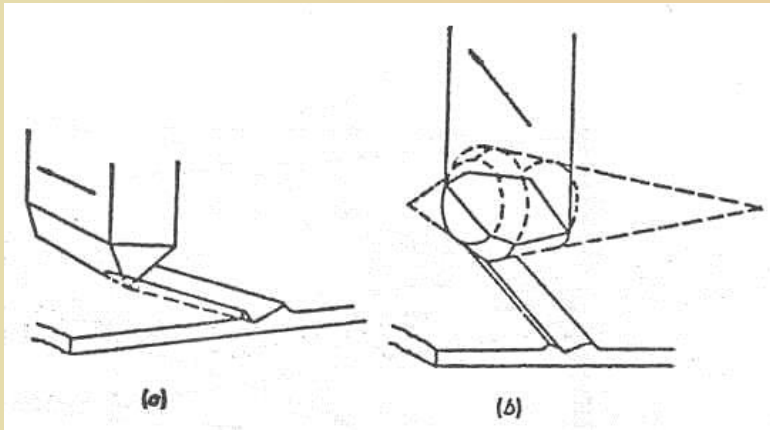
Holographisches Gitter mit 1830 F/mm



Holographic grating with
1830 grooves/mm

A rácskészítés módszerei

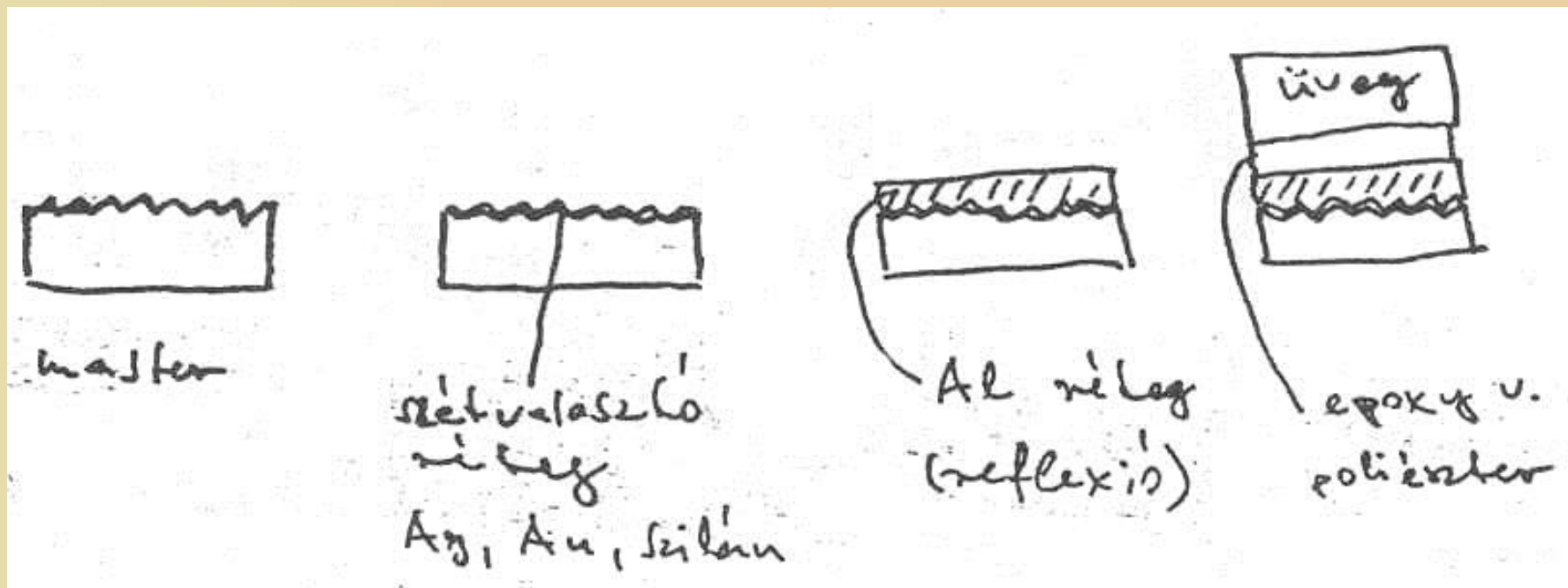
Karcolt rácsok



Szellemvonalak

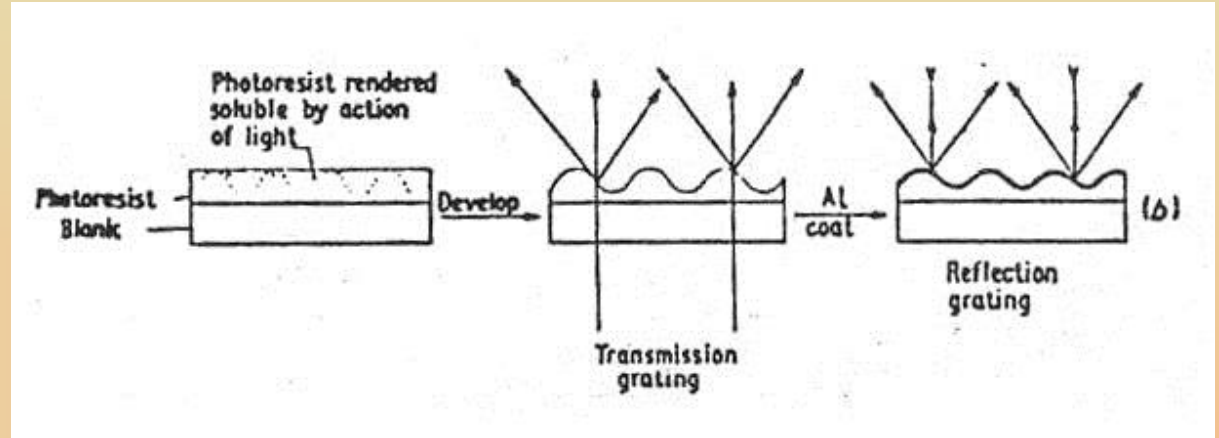
A rácskészítés módszerei

Master-replica technika

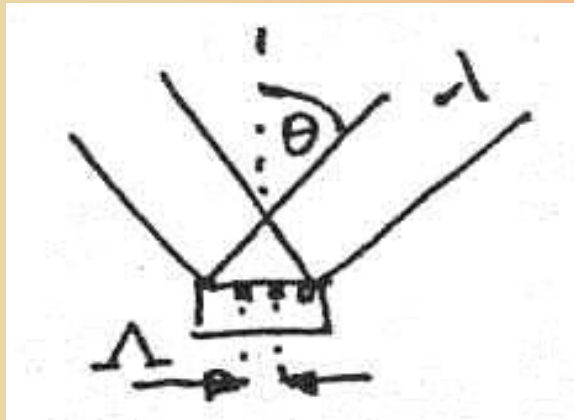


A rácskészítés módszerei

Holografikus rácsok



Exponálás



$$\Lambda = \frac{\lambda}{2 \sin \Theta}$$

A rácskészítés módszerei

Holografikus rácsok

Jobb elrendezések

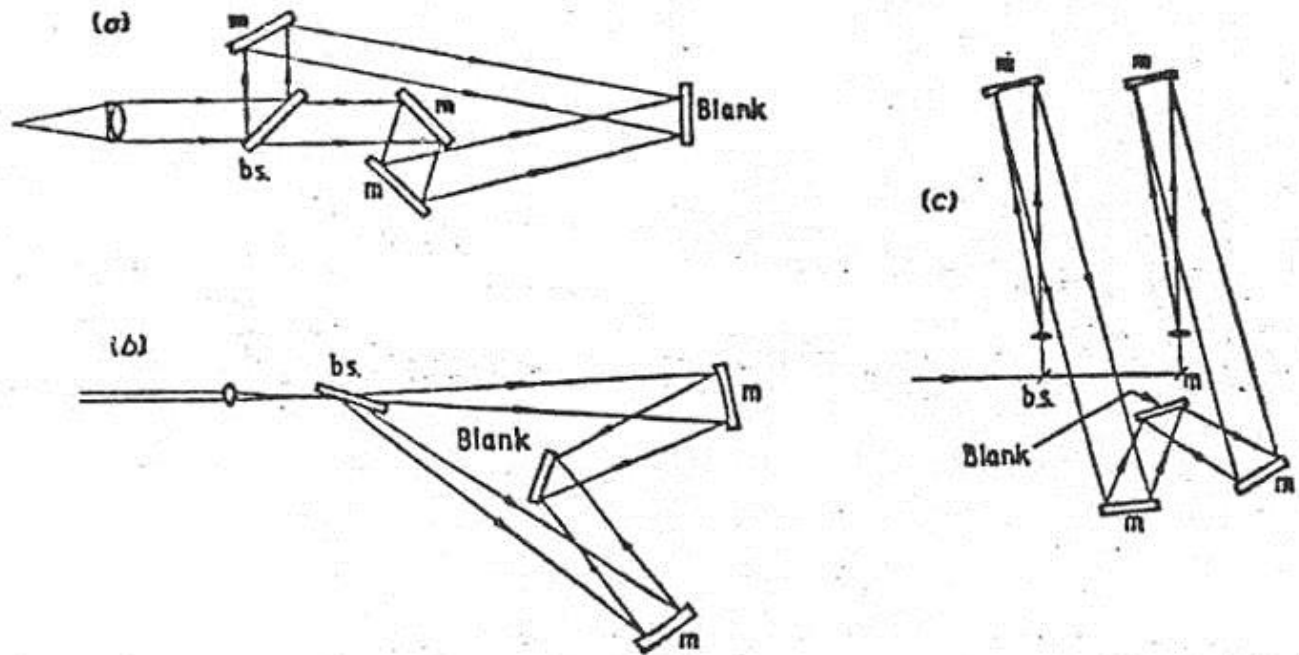
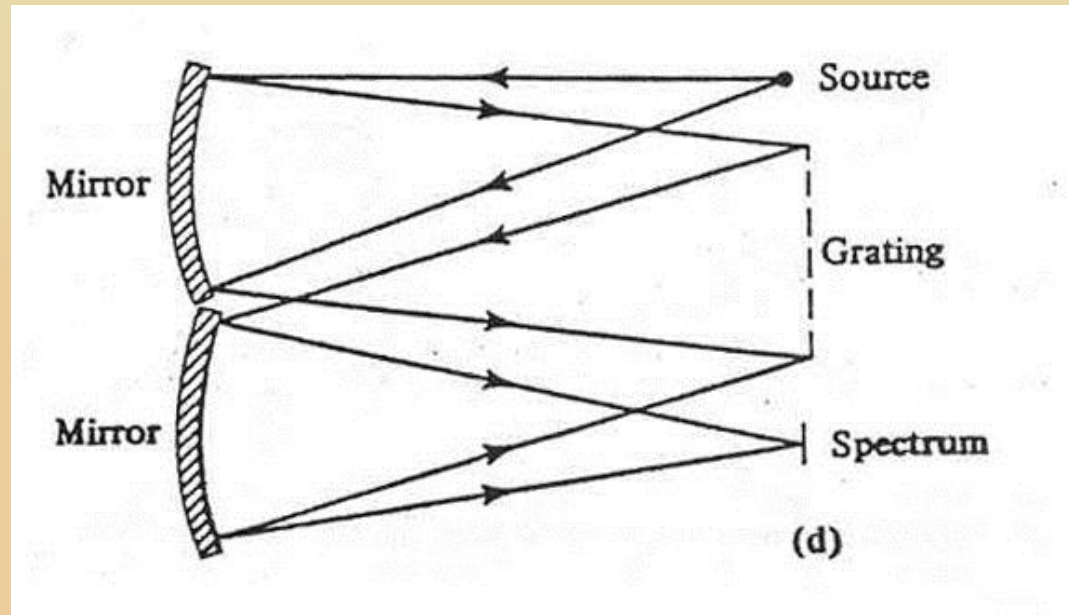


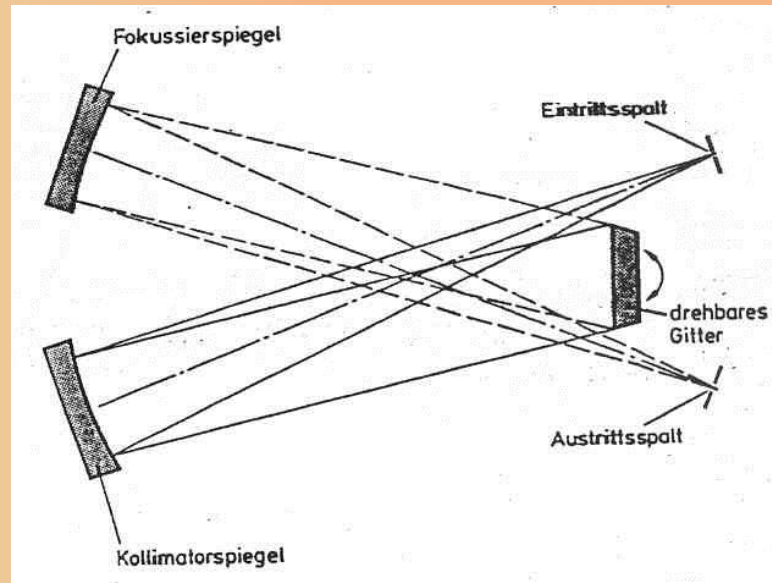
Figure 13. Interferometers for the production of diffraction gratings: m, mirror; b.s., beam splitter.

Rácsos spektrográfok

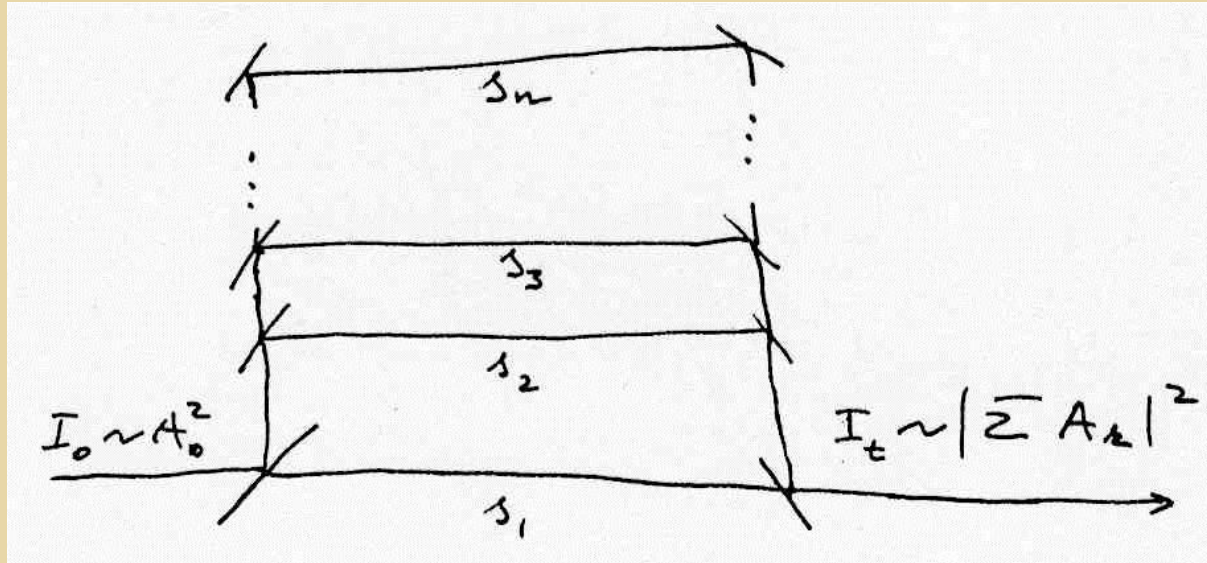
Czerny-Turner



Kóma kompenzálás



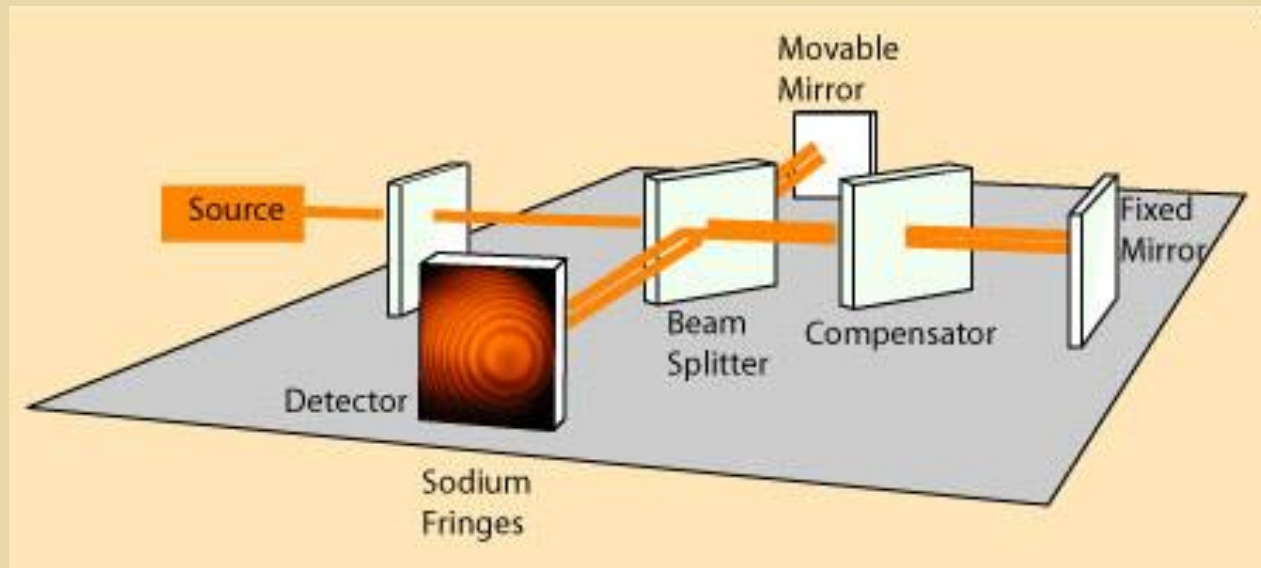
Az interferometria alapötlete



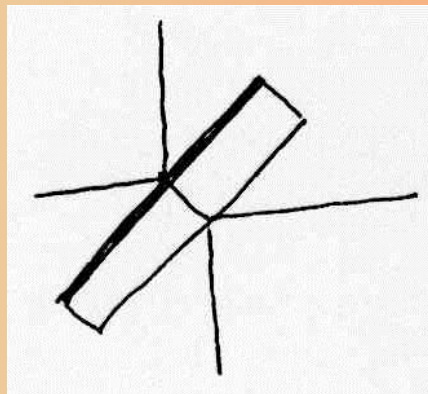
Kétsugaras: **Michelson**
Twyman-Green
Mach-Zehnder

Soksugaras: **Fabry-Perot**

Michelson interferométer



Hordozó kompenzálás



Michelson interferométer (folyt)

Ha a M interferométert egy párhuzamos monokromatikus nyalábbal világítjuk ki, akkor a kimenő intenzitás

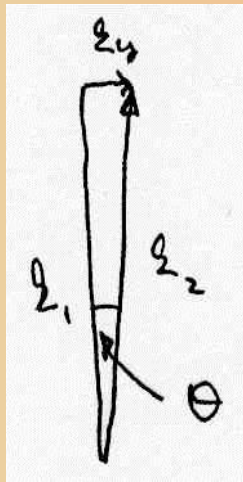
$$I_T = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \delta) = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad \text{ahol} \quad \delta = \overbrace{\Delta k \bar{r}}^0 + \Delta \phi = \tau \omega$$

Mit látunk, ha az egyik tükör egy kissé meg van döntve?

A döntés a k vektorokkal a következőképpen fejezhető ki:

$$k_1 = \{k_x, 0, 0\}$$

$$k_2 = \{k_x, k_y, 0\}$$



Ha $\Theta \ll 1$ akkor

$$k_x = k \quad \text{és} \quad k_y = k\Theta$$

Michelson interferométer (folyt)

Ekkor δ -ra írhatjuk:

$$\delta = (\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \bar{r} + \tau\omega = k_y y + \tau\omega = k\Theta y + \tau\omega$$

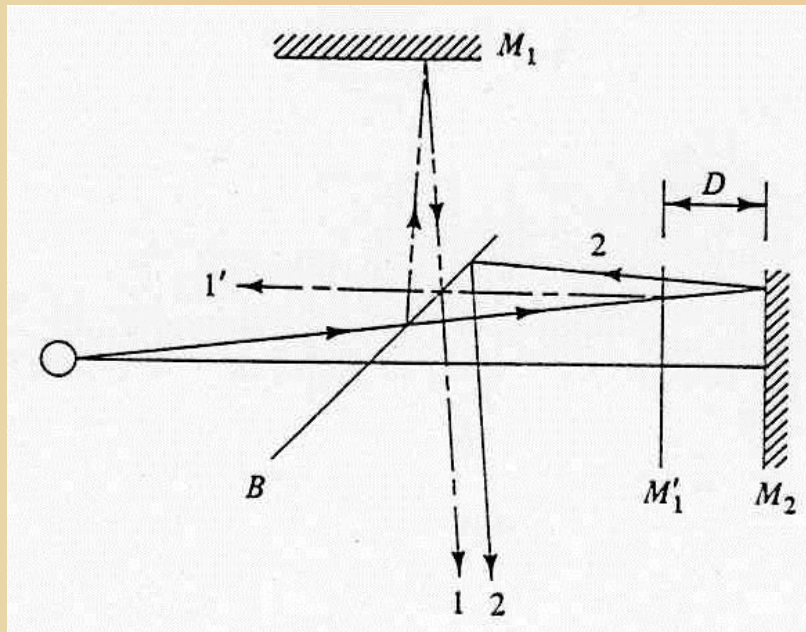
Azaz:
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Theta y + \tau\omega$$

Ha a fáziskülönbség 2π egész többszöröse, akkor erősítés van, ha π páratlan többszöröse akkor kioltás. Tehát ez egy sötét-világos csíkrendszer, melynek periódusa:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Theta y = m2\pi \Rightarrow y = m \frac{\lambda}{\Theta}$$

Michelson interferométer (folyt)

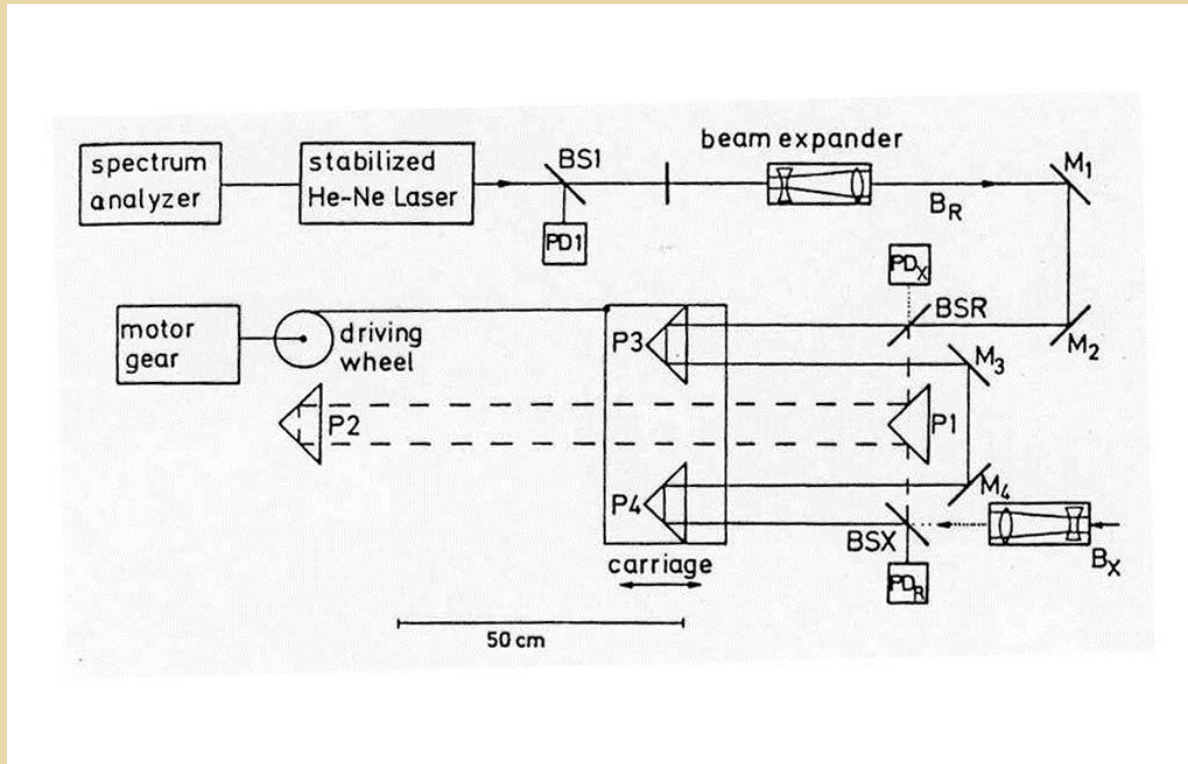
Mit látunk, ha az interferométert nem párhuzamos nyalábbal világítjuk ki?



Ilyenkor gyűrűk láthatók.

A Michelson interferométer alkalmazása

Hullámhosszmérés



Toljuk el a tükröt Δx -el. Ekkor az ismert hullámhosszra a fáziskülönbség

$$\delta_{ref} = 2\pi \frac{4\Delta x}{\lambda_{ref}}$$

a mérendőre

$$\delta_{meas} = 2\pi \frac{4\Delta x}{\lambda_{meas}}$$

A Michelson interferométer alkalmazása

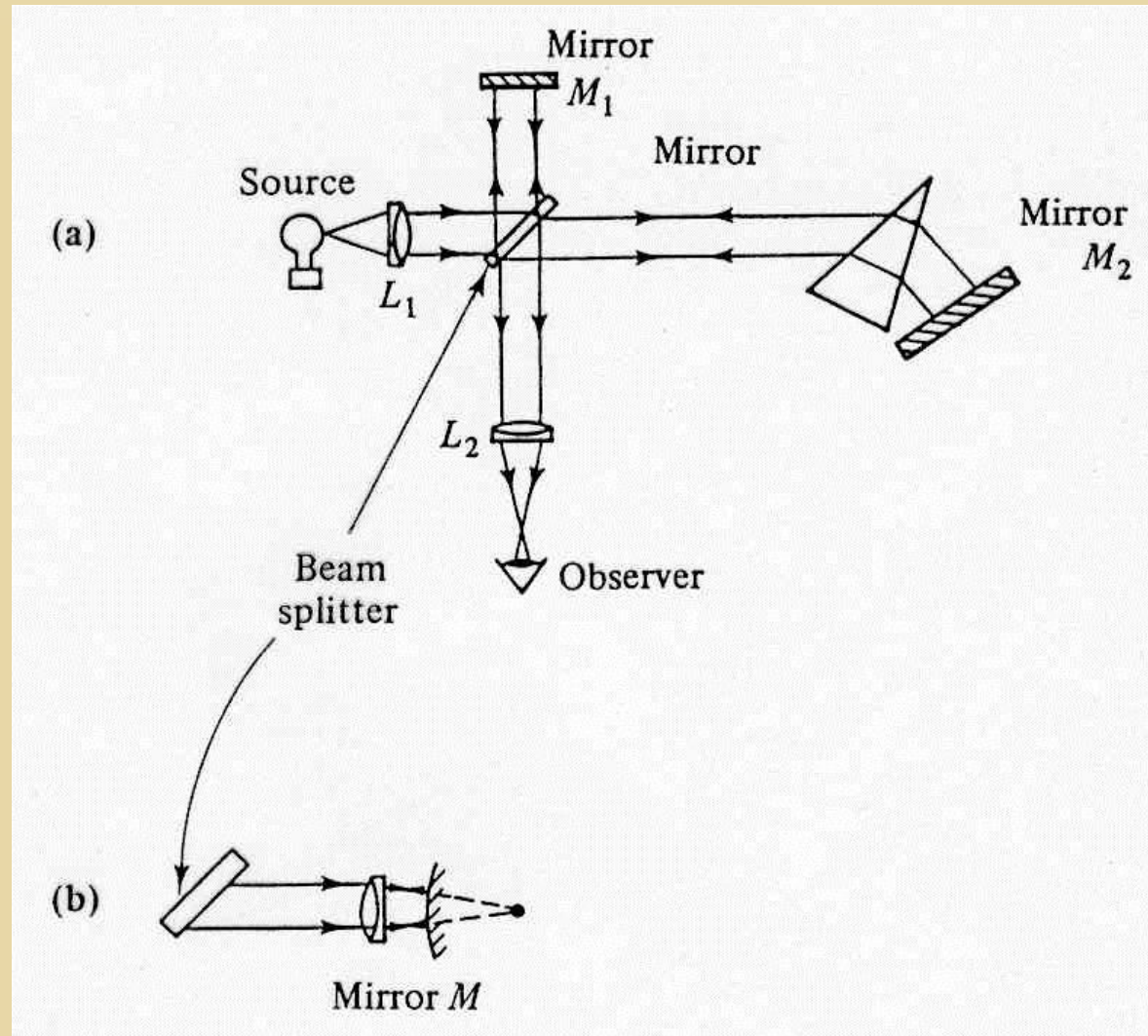
Hullámhosszmérés

Megmérve a δ -kat az ismeretlen hullámhossz:

$$\lambda_{meas} = \frac{\delta_{ref}}{\delta_{meas}} \lambda_{ref}$$

Ha $\Delta x = 1\text{m}$, akkor 400 nm-es fényt használva az útkülönbség 10^7 hullámhossz. Ha a fázisváltozás mérési pontossága $2\pi/100$, akkor a relatív hiba 10^{-9} , tehát ilyen pontosan mérhető a hullámhossz.

Twyman-Green interferometer



Mach-Zehnder interferometer

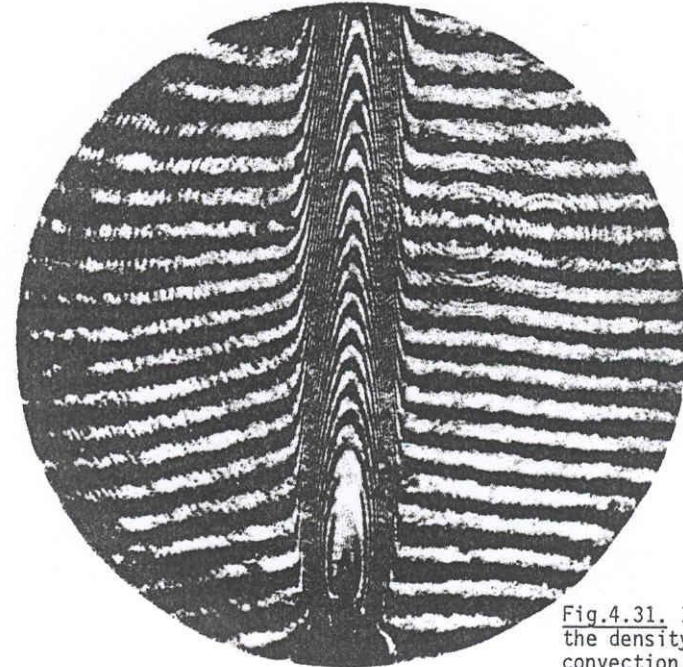
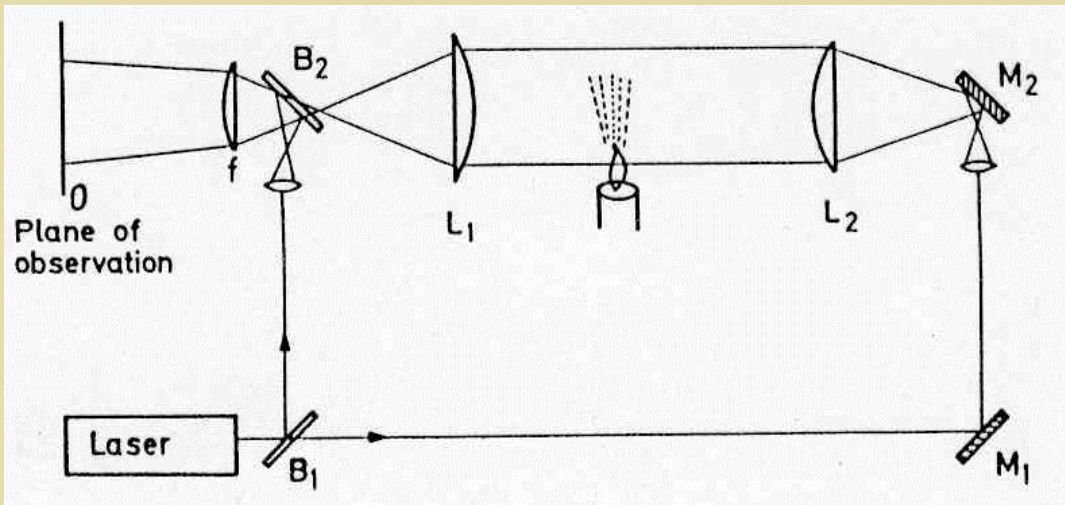
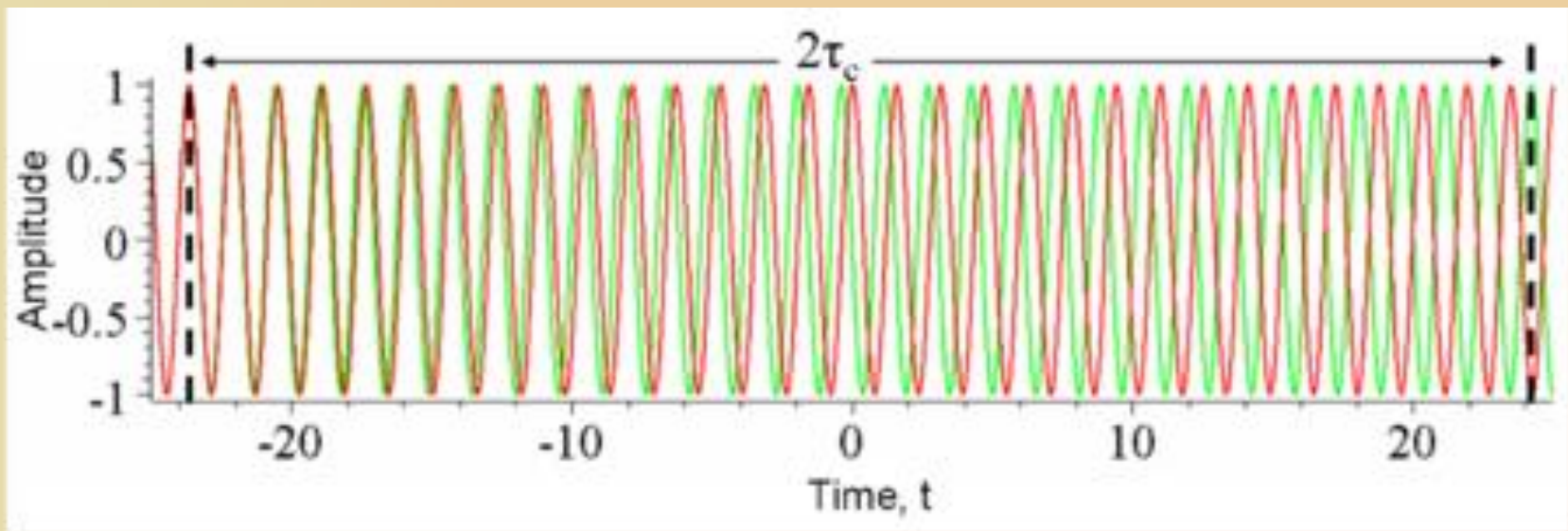


Fig.4.31. Interferogram of the density profile in the convection zone above a candle flame [4.22]

Spektrum és interferenciaképesség (koherencia) kapcsolata

Tekintsünk két, egymástól kissé eltérő hullámhosszú monokromatikus síkhullám összegét.



Az ábra bal oldalán az első maximumok egymásra esnek, $2\tau_c$ idő múlva a zölddel jelölt hullám maximuma éppen a piros egy minimumára esik, tehát kioltják egymást.

Spektrum és interferenciaképesség (koherencia) kapcsolata

Keressük meg a kioltás feltételét! (Ehhez célszerű az idő helyett hosszúságban gondolkozni.) Kioltás akkor lép fel ha az egyik komponens n -dik maximuma a másik minimumával esik egybe:

$$n\lambda_2 = (2n + 1) \frac{\lambda_1}{2}$$

Rendezzük át az egyenletet!

$$n(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow n\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

Ahol $\Delta\lambda$ a két hullámhossz különbsége (a spektrum szélessége), λ a központi hullámhossz.

Spektrum és interferenciaképesség (koherencia) kapcsolata

Ha L_c -vel jelöljük a két komponens összegeként létrejövő hullámvonulat hosszát (ez a koherenciahossz) akkor n kifejezhető, mint:

$$L_c = n\lambda \Rightarrow n = \frac{L_c}{\lambda}$$

Ezt beírva az előző egyenletbe a következő adódik:

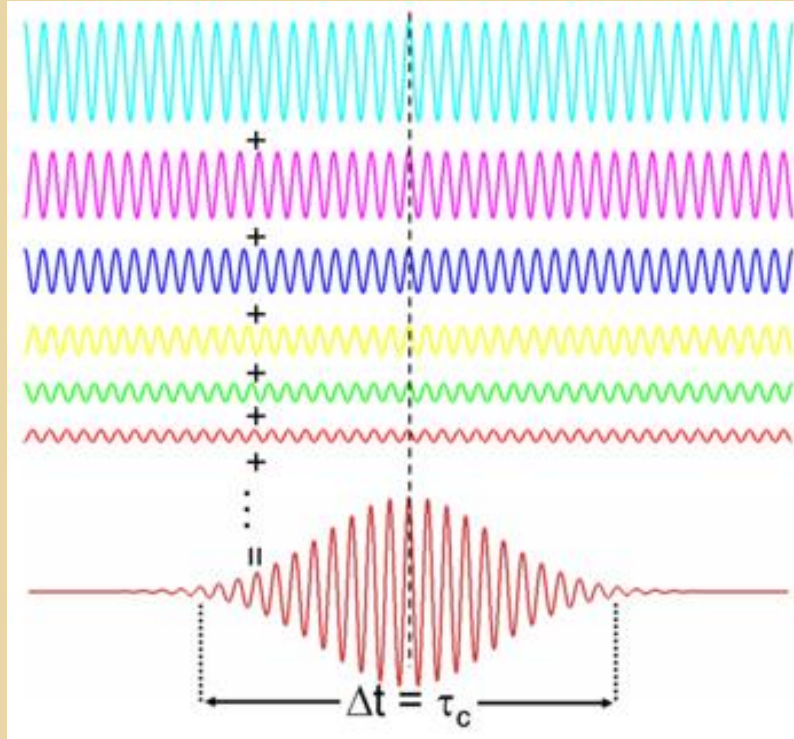
$$\frac{L_c}{\lambda} \Delta\lambda = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow L_c = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

Ha az ábrán bejelölt koherencia időre vagyunk kíváncsiak, akkor azt tüstént megkaphatjuk, ha elosztjuk L_c -t a fénysebességgel, azaz:

$$2\tau_c = \frac{L_c}{c} = \frac{\lambda^2}{2c\Delta\lambda}$$

Spektrum és interferenciaképesség (koherencia) kapcsolata

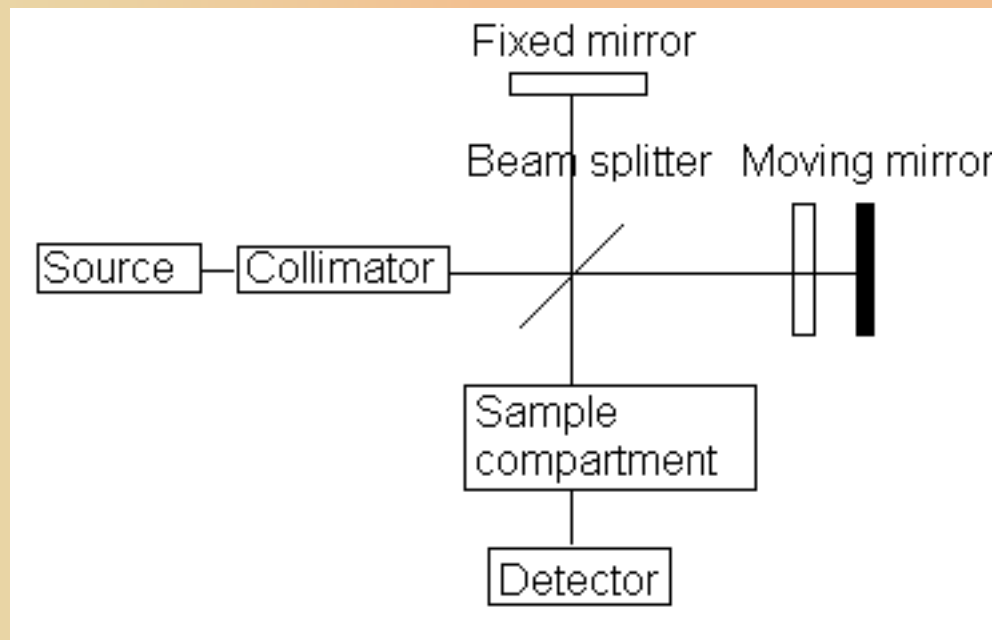
Ha a jel több komponensből áll akkor azt az alábbi módon szemléltethetjük:



Az ábráról láthatjuk, hogy a spektrum és a koherencia hossz/idő szoros kapcsolatban van egymással. Ennek alapján tehát remény van arra, hogy interferométerrel meghatározzuk a spektrumot.

A Michelson interferométer alkalmazása: Fourier transzformációs spektroszkópia

Tegyük fel, hogy a M. interferométer kimenetén egy $T \sim \infty$ időál-landójú detektort alkalmazunk, és mérjük a jelet úgy, hogy az egyik tükör helyzetét változtatjuk.



A Michelson interferométer alkalmazása: Fourier transzformációs spektroszkópia

A mért jelet úgy kaphatjuk meg, hogy a két korból érkező térerősségek összegéből képezzük az intenzitást, és azt időben integráljuk:

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |E(t) + E(t - \tau)|^2 dt$$

A négyzetre emelést elvégezve:

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)E^*(t)dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} E(t)E^*(t - \tau)dt + \int_{-\infty}^{\infty} E(t - \tau)E^*(t - \tau)dt$$

Fourier transzformációs spektroszkópia

A jobboldal első és harmadik tagja nyilvánvalóan független τ -tól, az érdekes rész a második tag. Az ilyen jellegű függvényeket:

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)E^*(t - \tau)dt$$

autokorrelációs függvénynek nevezzük. A M. interferométer tehát az E tér autokorrelációs függvényét méri.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen információt hordoz $g(\tau)$. Ehhez vegyük a fenti egyenlet Fourier transzformáltját:

$$F\{g(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} E(t)E^*(t - \tau)dt \right) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Fourier transzformációs spektroszkópia

A t helyett vezessük be $t'=t-\tau$ új változónak:

$$F\{g(\tau)\} = \int \int E(t)E(t') dt e^{-i\omega t} e^{i\omega t'} dt'$$

Átrendezve az integrálást:

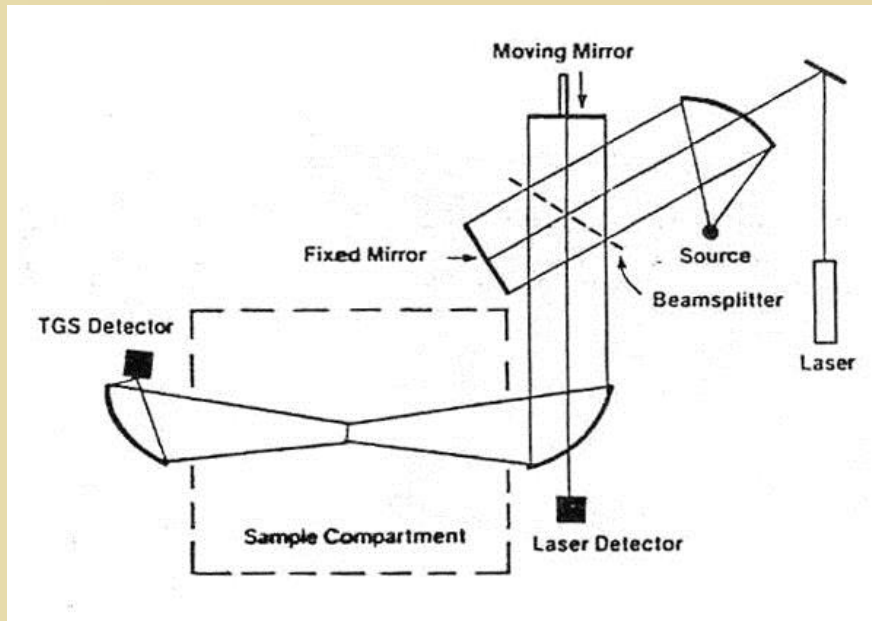
$$F\{g(\tau)\} = \int \underbrace{E(t)e^{-i\omega t} dt}_{A(\omega)} \int \underbrace{E(t')e^{i\omega t'} dt'}_{A^*(\omega)}$$

Tehát a végeredmény:

$$F\{g(\tau)\} = |A(\omega)|^2 = I(\omega)$$

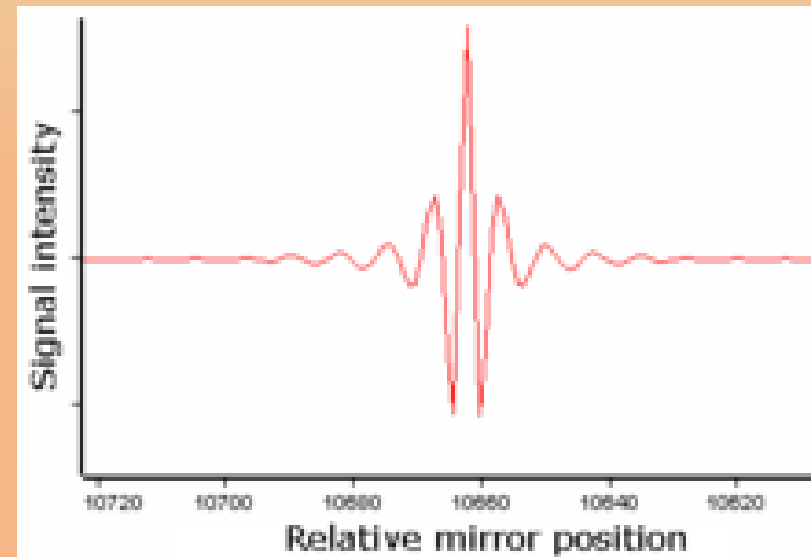
Wiener-Hincsin tétel

FT készülékek



Digilab Qualimatic FT

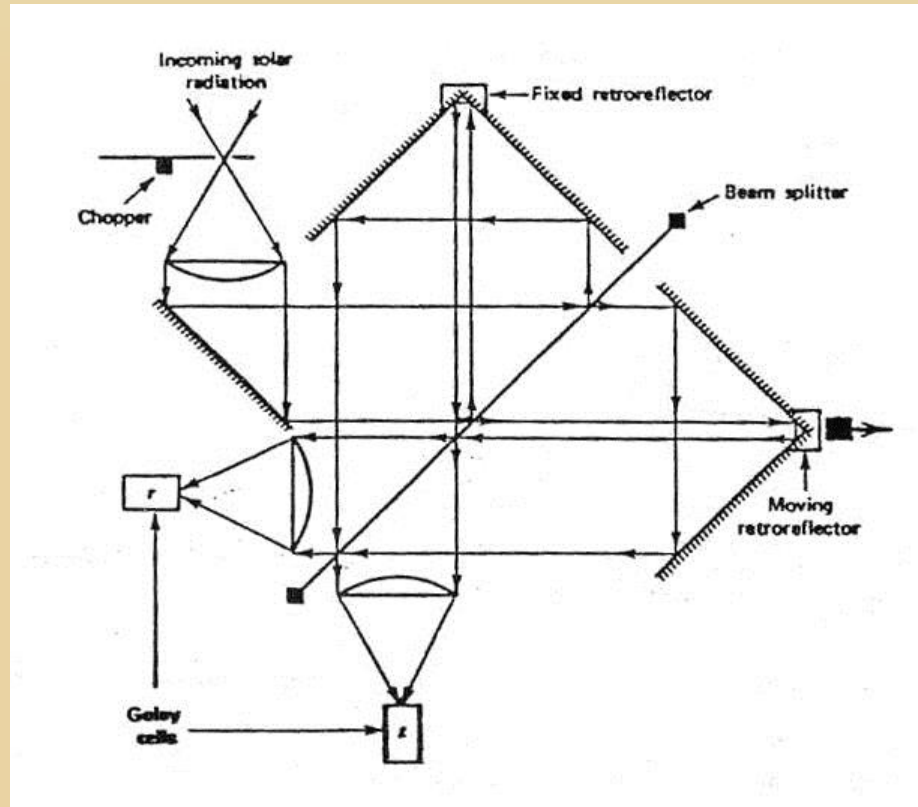
Egy tipikus regisztrátum



Probléma: a tükör helyzetének pontos mérése

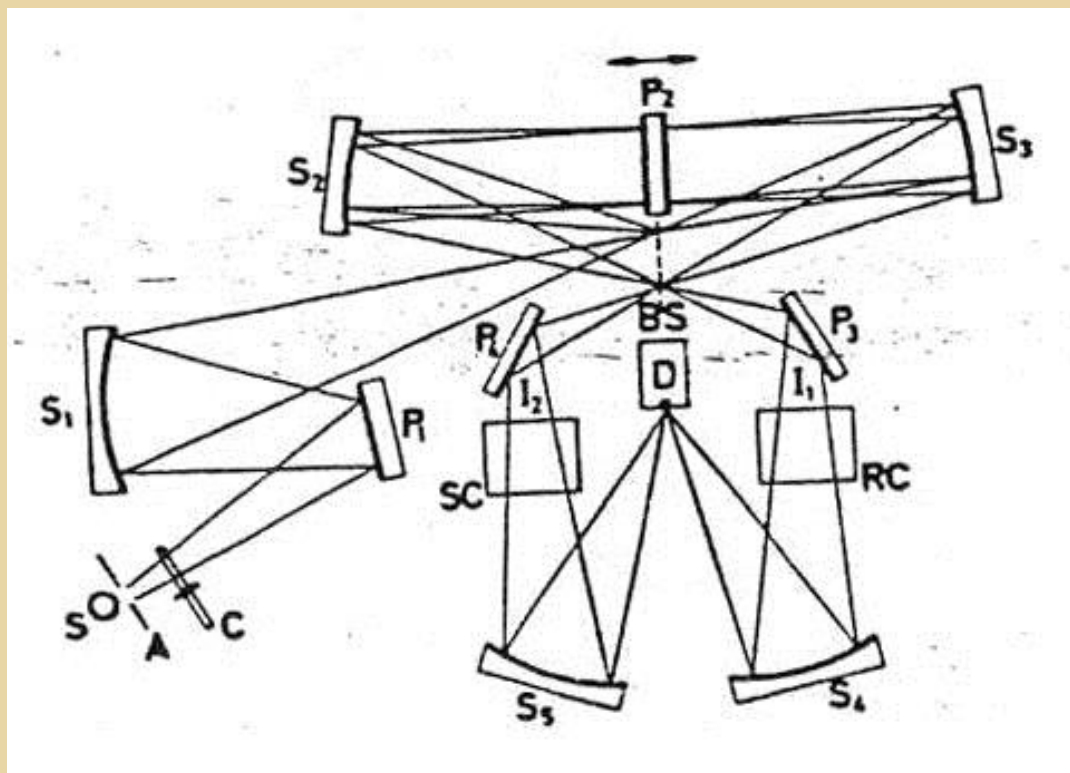
Megoldás: referencia lézer (HeNe)

FT készülékek



Távoli infravörös készülék

FT készülékek



Genzel interferométer

Az FT módszer előnyei

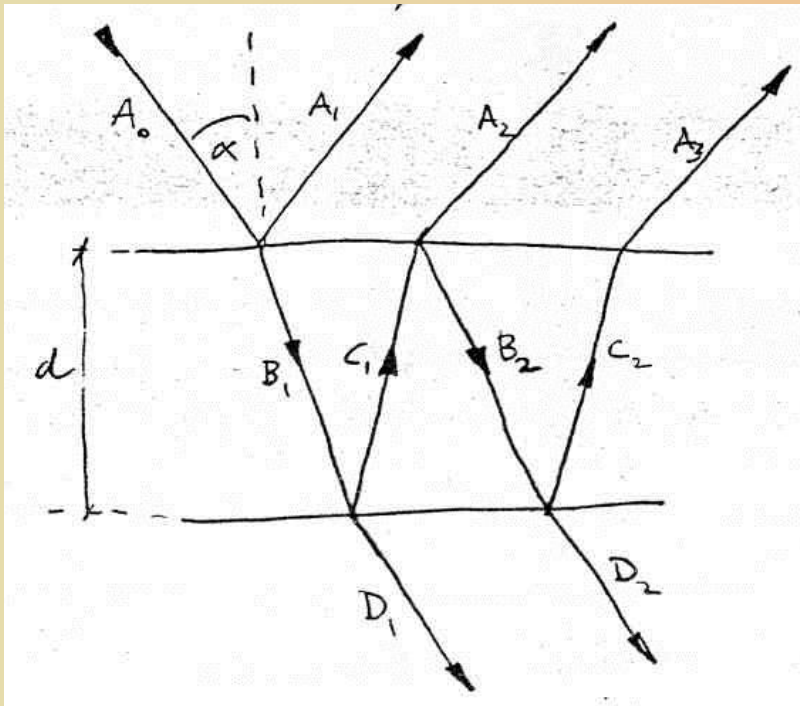
Feloldóképesség

Fényhasznosítás

Felgett-előny

Soksugaras interferométer: Fabry-Perot

Tekintsünk egy planparalel lemezt, amelyre α szög alatt egy pár-huzamos fénynyaláb esik. (A lemez legyen ideális, azaz $T+R=1$.)



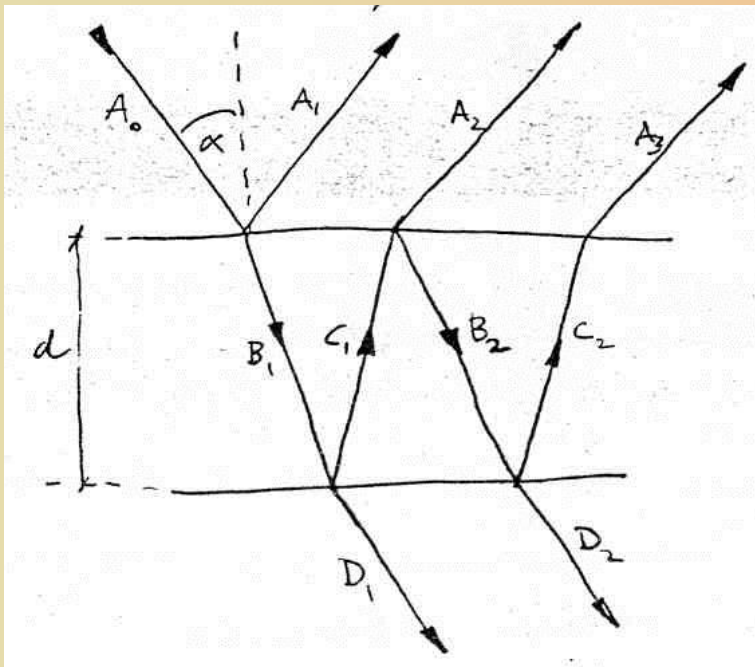
A felületen áthaladó, ill. az arról visszavert amplitúdókra írhatjuk:

$$A_R = A_i \sqrt{R}$$

$$A_T = A_i \sqrt{T} = A_i \sqrt{1-R}$$

Fabry-Perot interferométer

A különböző fajta amplitúdókra írhatjuk:



$$|A_1| = \sqrt{R}|A_0|$$

$$|B_1| = \sqrt{1-R}|A_0|$$

$$|C_1| = \sqrt{R}|B_1| = \sqrt{R}\sqrt{1-R}|A_0|$$

$$|D_1| = \sqrt{1-R}|B_1| = (1-R)|A_0|$$

$$|A_2| = \sqrt{1-R}|C_1| = \sqrt{R}(1-R)|A_0|$$

$$|A_3| = \sqrt{R}\sqrt{R}\sqrt{1-R}|C_1| = R^{3/2}(1-R)|A_0|$$

Fabry-Perot interferométer

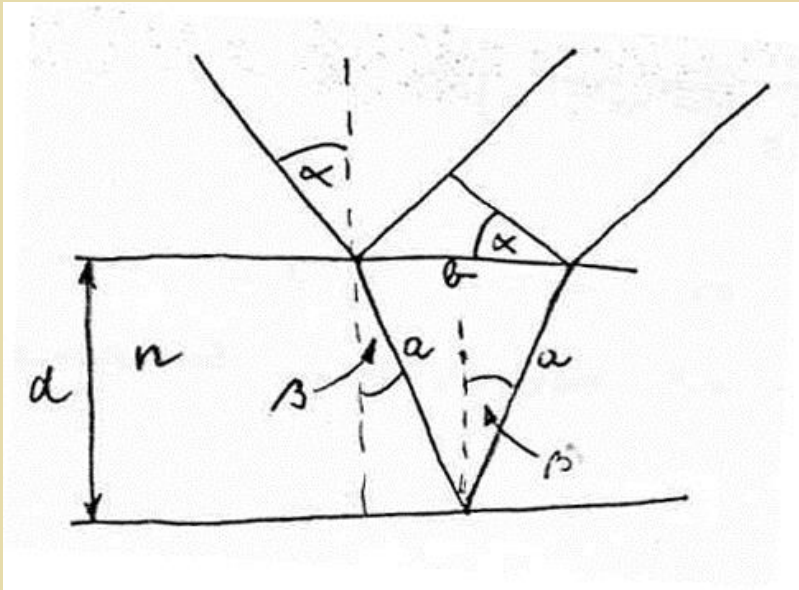
Vegyük észre, hogy az A típusú amplitúdókra $i \geq 2$ esetén a következő rekurzió írható fel:

$$|A_{i+1}| = R|A_i|$$

Ahhoz, megkapjuk a visszavert intenzitást fázishelyesen összegeznünk kell az amplitúdókat és négyzetre emelnünk.

A fáziskülönbséghez először számítsuk ki az útkülönbséget.

Fabry-Perot interferométer



$$\Delta s = 2na - b \sin \alpha$$

$$a = \frac{d}{\cos \beta} \quad b = 2d \tan \beta$$

$$\Delta s = 2d \left(\frac{n}{\cos \beta} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin \alpha \right)$$

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

$$\Delta s = 2nd \cos \beta$$

Mivel β -t közvetlenül nem ismerjük, ezért azt célszerű eliminálni. Ezzel az útkülönbség:

Fabry-Perot interferométer

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

A fáziskülönbségre adódik:

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda} + \Delta\varphi$$

Ahol $\Delta\varphi$ 0 vagy π aszerint, hogy a visszaverődés sűrűbb, vagy ritkább oldalról történik.

A_1 -re írhatjuk:

$$A_1 = \sqrt{R}A_0 e^{i\pi} = -\sqrt{R}A_0$$

Fabry-Perot interferométer

Ezzel a visszavert amplitúdók összegére kapjuk:

$$A = -\sqrt{R}A_0 + (1-R)\sqrt{R}A_0e^{i\delta} + (1-R)\sqrt{R}A_0R^{3/2}e^{i2\delta} + \dots$$

Vagy:

$$A = -\sqrt{R}A_0 \left(1 - (1-R)e^{i\delta} \sum_{m=0}^{p-2} R^m e^{im\delta} \right)$$

Tegyük fel, hogy a lemez felülete kellően nagy, hogy $p \rightarrow \infty$, ekkor egy mértani sorunk van, tehát:

$$A = -\sqrt{R}A_0 \frac{1 - e^{i\delta}}{1 - R e^{i\delta}}$$

Fabry-Perot interferométer

Ezzel a keresett intenzitás:

$$I_e \sim AA^* = I_0 R \frac{2 - 2 \cos \delta}{1 + R^2 - 2R \cos \delta}$$

Kihasználva az $1 - \cos \delta = 2 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)$ azonosságot kapjuk:

$$I_R = I_0 R \frac{4 \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}$$

Tudjuk, hogy $T+R=1$ akkor nyilván $I_T=1-I_R$, tehát az áthaladó

Fabry-Perot interferométer

intenzitásra kapjuk:

$$I_T = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

(Ezek az ú.n. Airy formulák.)

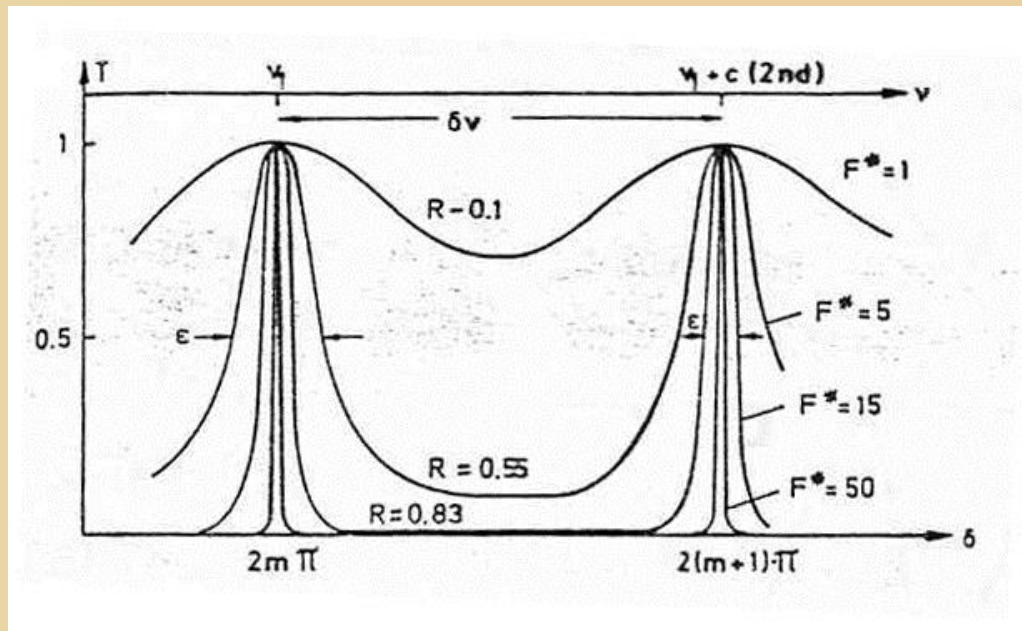
Vezessük be az $F=4R/(1-R)^2$ jelölést, ezzel:

$$I_R = I_0 \frac{F \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1 + F \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Fabry-Perot interferométer

Hogy néz ki a transzmissziós függvény különböző R -ekre?



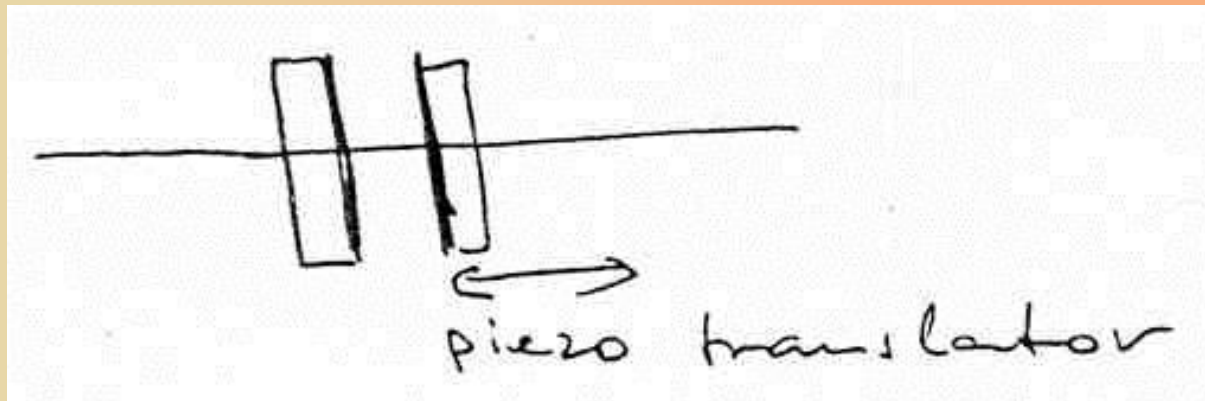
Az ábráról látható, hogy a F-P transzmissziója δ -nak éles függvénye. Hogyan lehet δ -t változtani? Ehhez idézzük fel δ alakját.

Fabry-Perot interferométer

$$\delta = 2\pi \frac{2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\lambda}$$

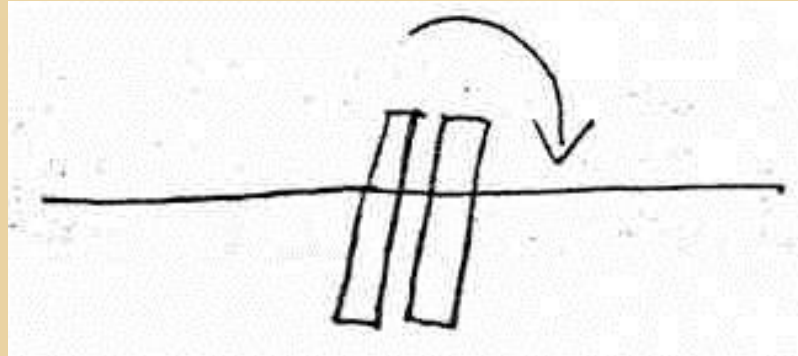
Nyilvánvaló, hogy δ -t d , α , és n változtatásával lehet befolyásolni.

d változtatása: scanning F-P.

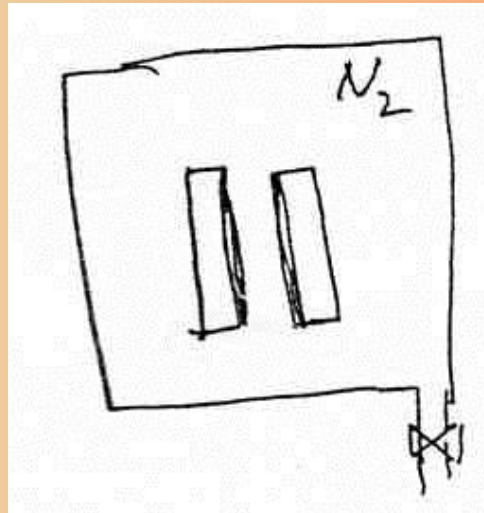


Fabry-Perot interferométer

α változtatása:



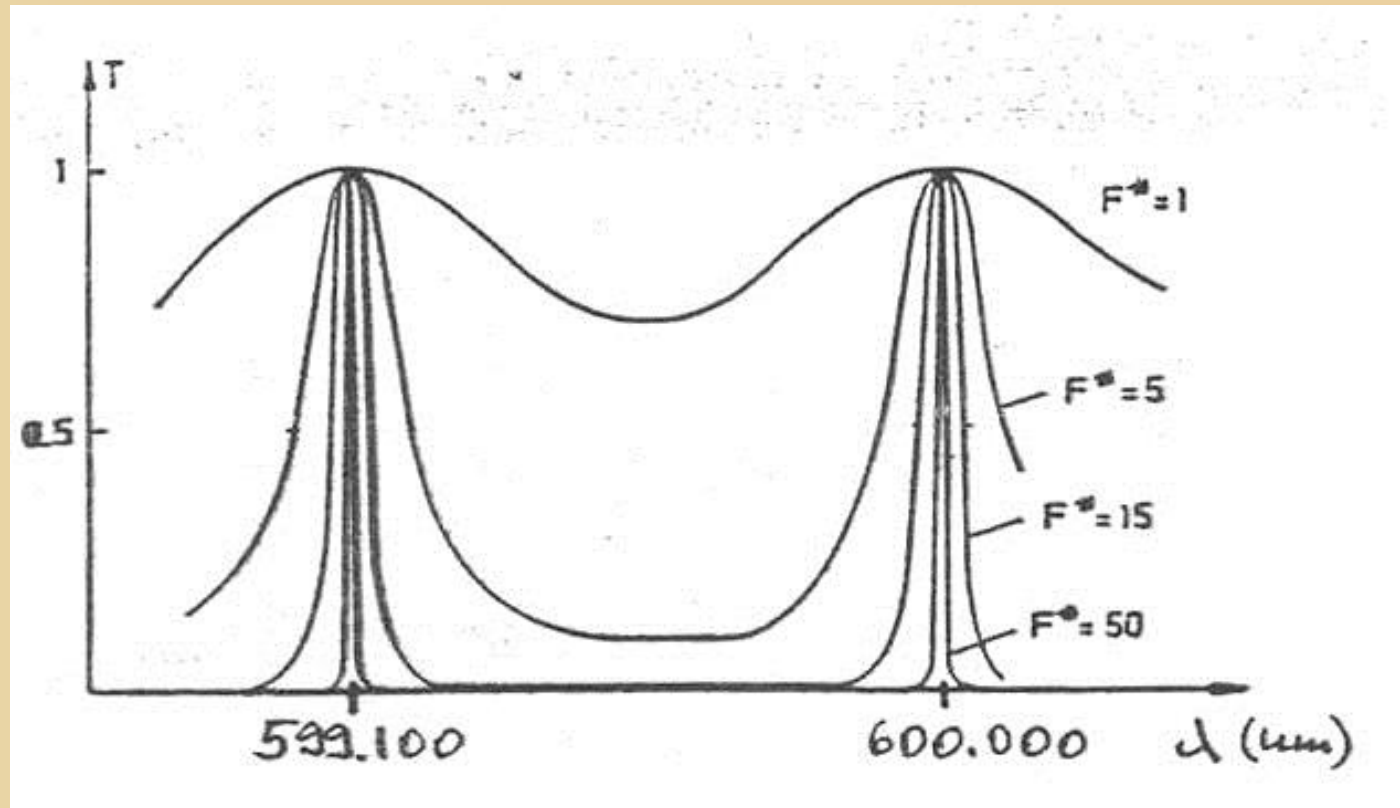
n változtatása: nyomással hangolt F-P



Fabry-Perot interferométer

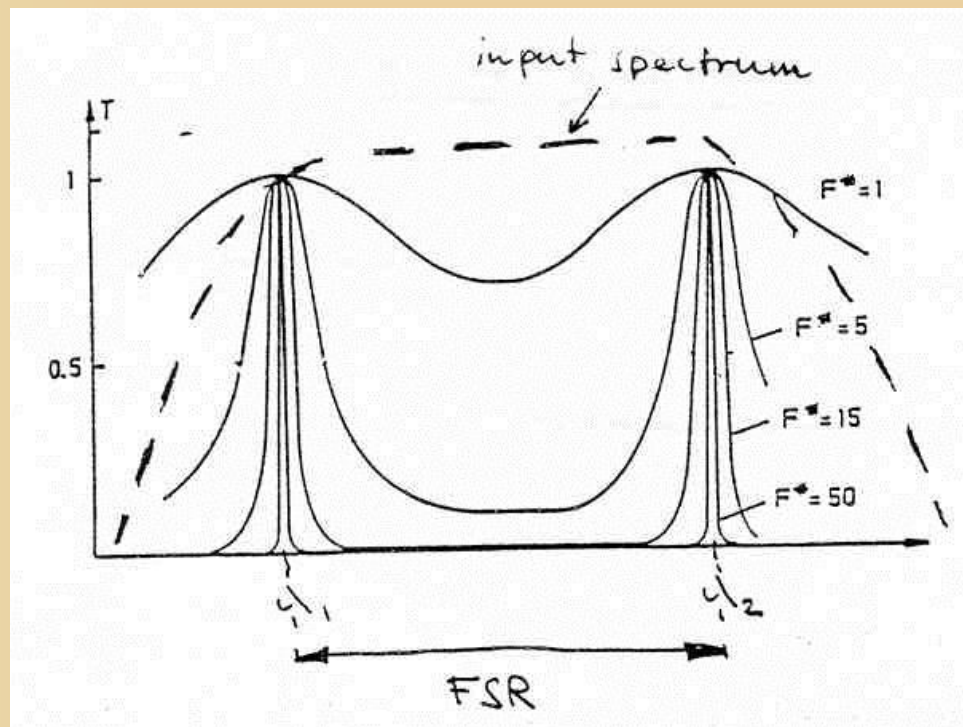
Az FP interferométer mint spektrális szűrő:

$D = 2 \text{ mm},$
 $n = 1,$
 $\alpha = 0$



Fabry-Perot interferometer

Free spectral range (FSR)



$$\Delta\delta = 2\pi$$

Fabry-Perot interferométer

Fejezzük ki a fáziskülönbséget az útkülönbséggel:

$$2\pi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda_1} - \frac{2\pi\Delta s}{\lambda_2}, \Delta s \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{\Delta s}{c} (\nu_1 - \nu_2)$$

Használjuk ki az útkülönbségre korábban kapott kifejezést:

$$\Delta \nu = \frac{c}{\Delta s} = \frac{c}{2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

Ez különösen szemléletes, ha $\alpha=0$, azaz:

$$\Delta \nu = \frac{c}{2nd}$$

Fabry-Perot interferométer

A vizsgálható maximális spektrum szélességét az FSR határozza meg, a feloldóképességet egy áteresztési csúcs szélessége. Az igazán fontos értékmérő ennek a kettőnek a hányadosa, amit *finesse*-nek (F^*) nevezünk. Azaz:

$$F^* = \frac{FSR}{\varepsilon}$$

ε kiszámítható az Airy-formulákból:

$$\varepsilon = 4 \arcsin\left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}}\right)$$

Ha $R \gg 1-R$ akkor a $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ közelítés használható, azaz:

Fabry-Perot interferométer

$$\varepsilon = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

Miután az FSR éppen 2π fáziskülönbséget jelent ezért a finesse:

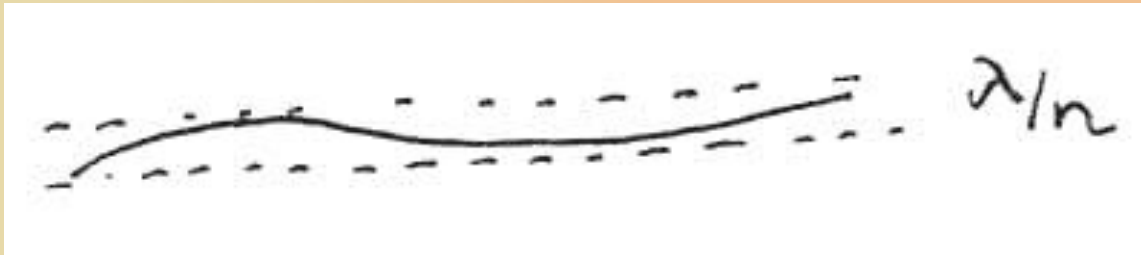
$$F^* = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

A finesse szoros kapcsolatban van, az egymással hatásosan és fázishelyesen interferáló nyalábok számával.

Fabry-Perot interferométer

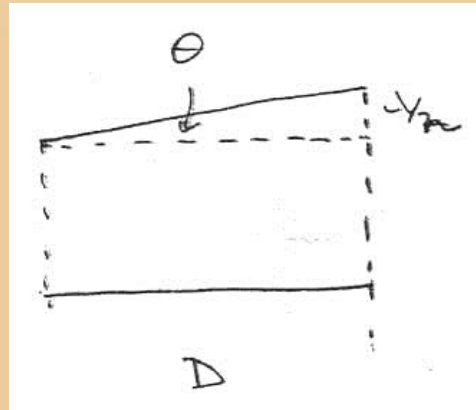
A gyakorlatban a finesse-nek korlátai vannak

A tükör felületének egyenetlenségei (surface finesse)



Fabry-Perot interferométer

A tükrök nem párhuzamosak/ékesség (wedge finesse)



Ha az F-P átmérője D , a tükrök szöge Θ akkor n körüljárás után a két szél között felgyűlt útkülönbség hiba:

$$\Delta = n\Theta D$$

Fabry-Perot interferométer

Ahhoz, hogy a fázishelyesség ne romoljon le $\Delta \leq \lambda/4$ szükséges:

$$\Theta \leq \frac{\lambda}{4nD}$$

Legyen $D=1\text{cm}$, $\lambda=500\text{ nm}$ akkor $F^*=20$ ($n=20$) azt jelenti, hogy:

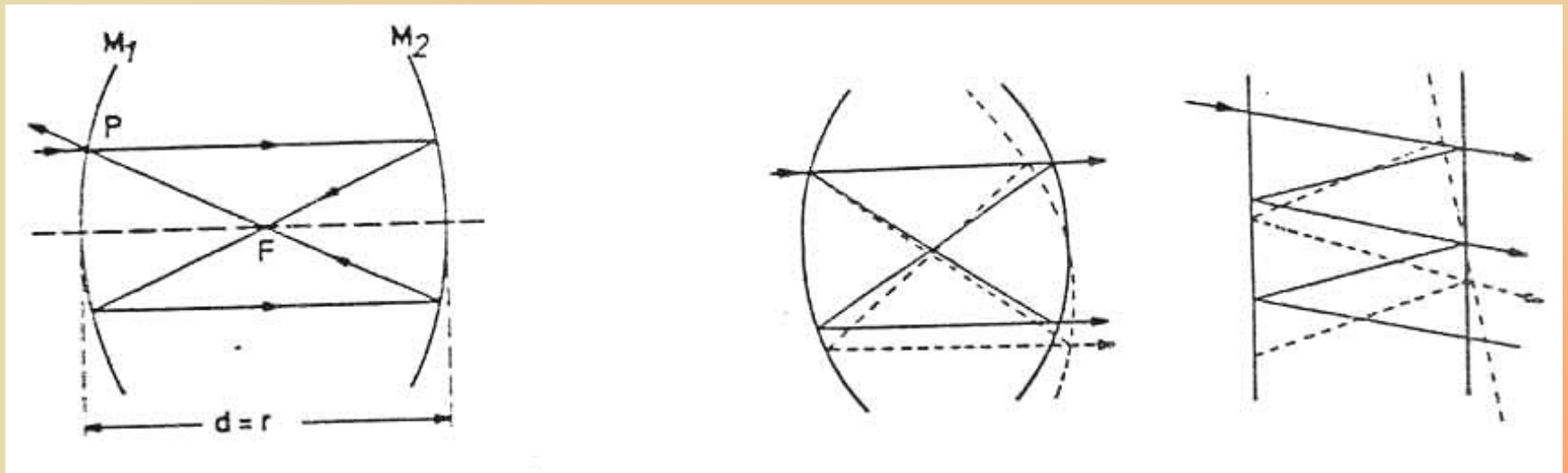
$$\Theta = 0,75 \mu\text{rad} \quad !!!$$

Finesse-k összegzése:

$$\frac{1}{F_t^*} = \sum \frac{1}{F_i^*} \quad \text{A legrosszabb a meghatározó!}$$

Fabry-Perot interferometer

A wedge finesse megoldása: konfokális F-P.

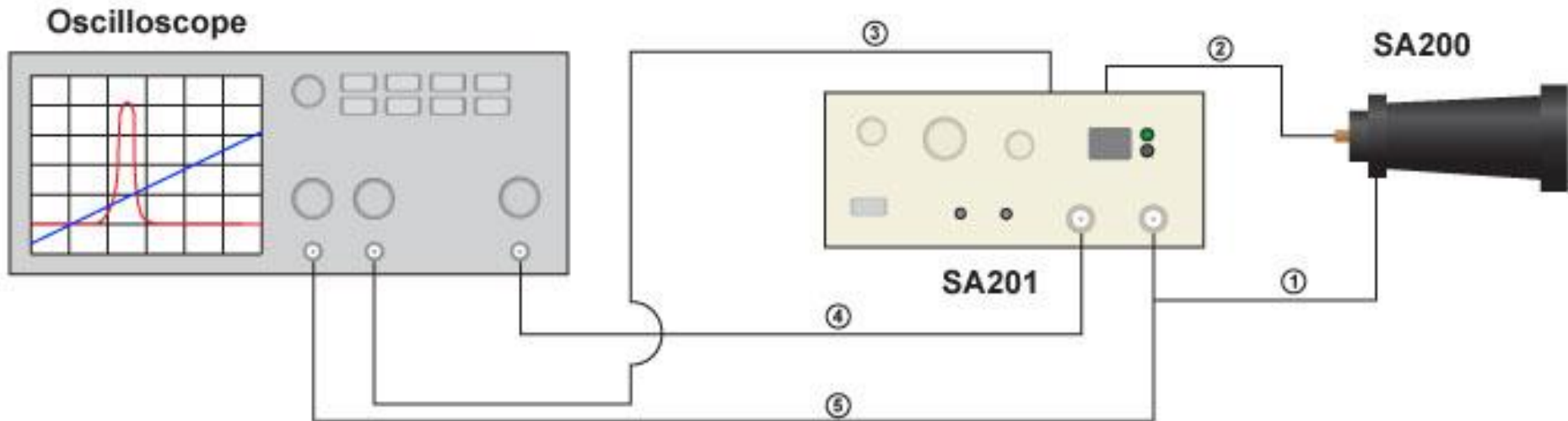
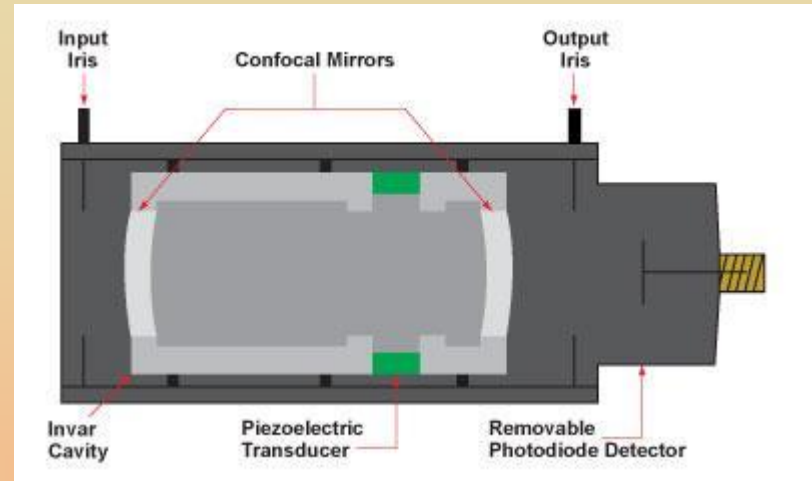


$$F^* \sim 1000$$

Fabry-Perot interferométer

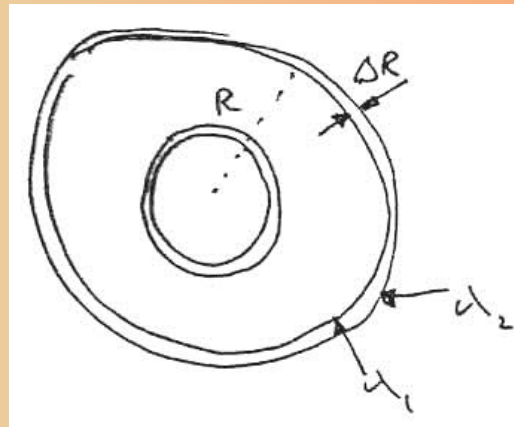
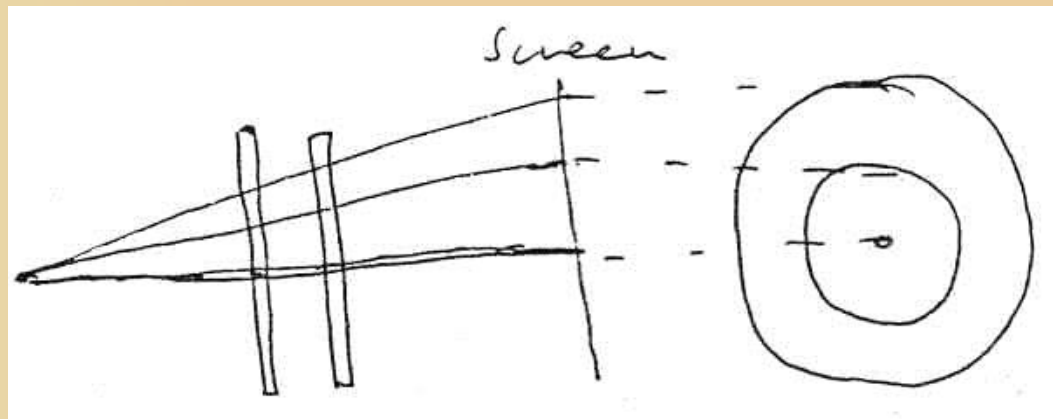
Scanning konfokális F-P.

$$F^* = 200 - 250$$

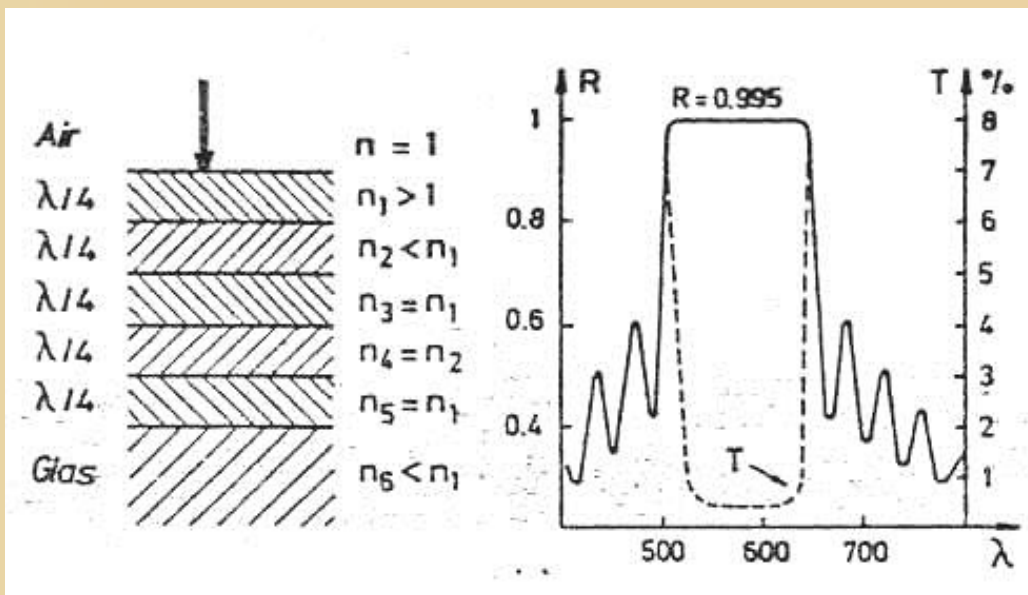


Fabry-Perot interferométer

Divergens fénynyalábbal kivilágított F-P.



Interferometrikus bevonatok (dielektrikum tükrök)



Newport super cavity: $F^* \sim 40000$

LIGO tükröbevonatok: $T \sim 5-15$ ppm